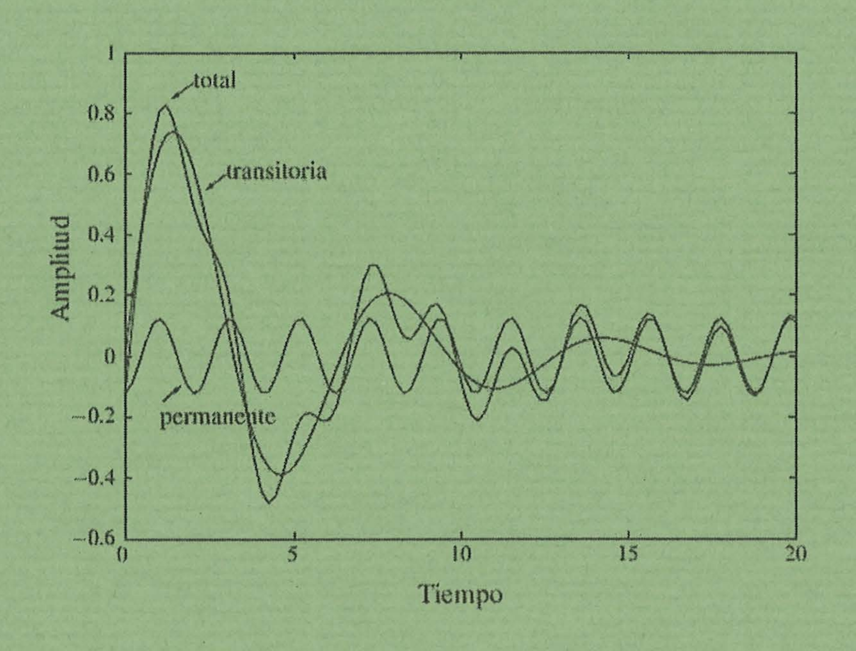
VIBRACIONES Y ONDAS (I)

OSCILACIONES MECÁNICAS

por

AGUSTÍN MARTÍN DOMINGO



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-74-01

VIBRACIONES Y ONDAS (I)
OSCILACIONES MECÁNICAS

por

AGUSTÍN MARTÍN DOMINGO

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-74-01

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

3 Área
74 Autor
01 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

Vibraciones y ondas (I)
Oscilaciones mecánicas
2007 Agustín Martín Domingo
Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Nadezhda Vasileva Nicheva
CUADERNO 244.01/ 3-74-01
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-251-2
ISBN-13: 978-84-9728-252-9
Depósito Legal: M-31980-2007

Indice

Capítulo 1
Cinemática del movimiento oscilatorio

Índice

1.1. El movimiento armónico simple (M.A.S.)

Denominaremos *oscilación* a un movimiento que se produce en torno a una posición de equilibrio con pasos sucesivos en torno a la misma. Asimismo, denominaremos habitualmente *vibración* a un movimiento periódico, es decir, un movimiento que se repite en todos los detalles después de transcurrido un cierto intervalo de tiempo al que se denomina precisamente periodo. En general, un movimiento periódico puede ser muy complicado, como se muestra en la figura 1–1

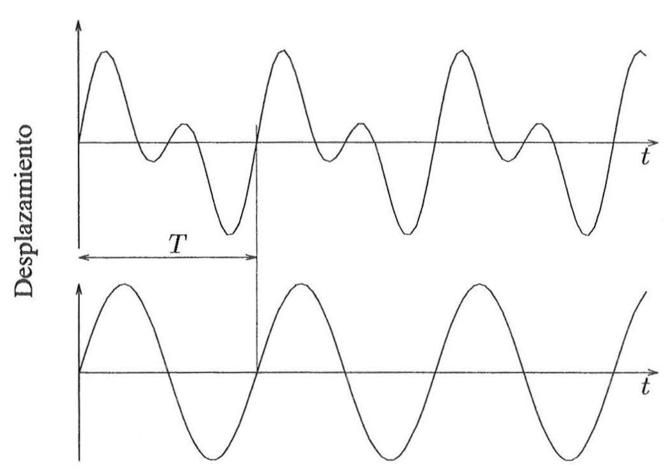


Figura 1–1 Movimiento periódico y movimiento armónico de un mismo periodo.

El caso más sencillo de movimiento periódico lo constituye el movimiento armónico. Decimos que una partícula que se mueve a lo largo del eje Ox describe un movimiento armónico simple cuando su desplazamiento x respecto del origen del sistema de coordenadas viene dado por la relación

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha) \tag{1–1}$$

donde $\omega t + \alpha$ es la fase total del movimiento, siendo α la fase inicial o ángulo de fase, es decir el valor del desplazamiento para el instante $t = 0$. Como se ve en la figura 1–2, debido a la presencia de este ángulo de fase los dos movimientos armónicos de la misma frecuencia angular ω no alcanzan sus máximos al mismo tiempo, sino que uno de ellos lo alcanza un tiempo α/ω más tarde. Este ángulo de fase tiene su principal significado cuando ambos movimientos tienen la misma frecuencia. Podríamos haber expresado la función anterior en función de una función coseno, la

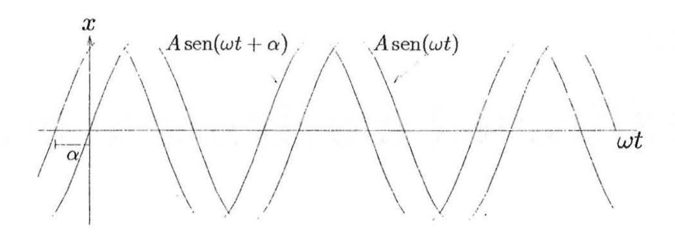


Figura 1–2 Movimientos armónicos simples con distintas fases.

única diferencia habría sido una fase adicional de $\pi/2$. Como tanto la función seno como la función coseno varían entre ± 1, el máximo desplazamiento que tiene lugar en el movimiento será $x = \pm A$. Así, A es el máximo desplazamiento a partir del origen y le denominamos amplitud del movimiento.

Asimismo, por ser una función seno o coseno, el desplazamiento se repite cada vez que el ángulo varía en una cantidad 2π, por lo que cada vez que el tiempo cambia en $T = 2\pi/\omega$ el movimiento se repite. Así, el movimiento armónico es un movimiento periódico de periodo T. La frecuencia del movimiento armónico es igual al número de oscilaciones completas que tienen lugar en la unidad de tiempo, es decir, $\nu = 1/T$ y se mide en ciclos por segundo (Hertzios) o en maquinaria, en revoluciones por minuto (r.p.m.). A ω se le denomina frecuencia angular de la oscilación y representa la velocidad de cambio de la fase total $\omega t + \alpha$. De esta forma, la relación entre la frecuencia angular, el periodo y la frecuencia está dada por

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \tag{1–2}$$

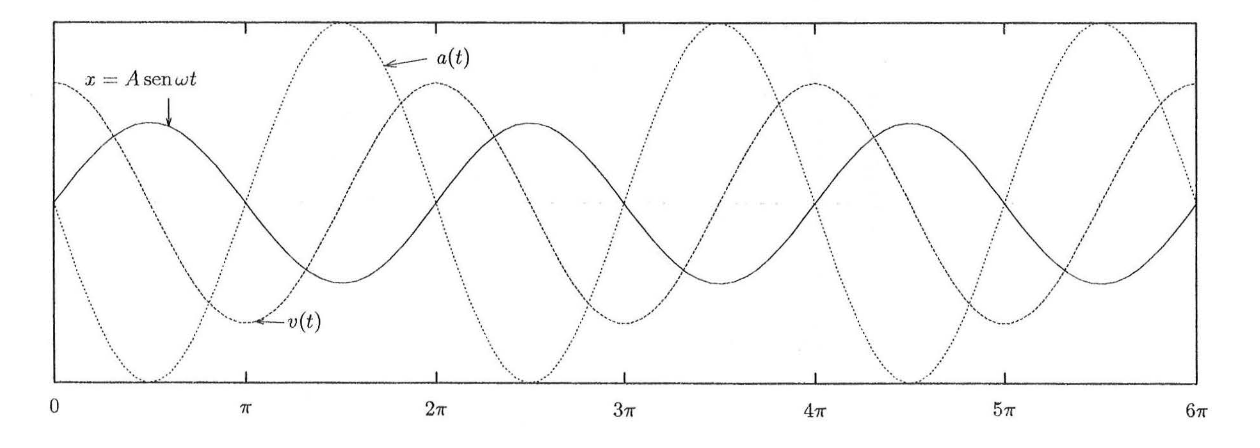


Figura 1–3 Desplazamiento, velocidad y aceleración del movimiento armónico en función de la fase total $\omega t + \alpha$

Para determinar la velocidad en un instante determinado únicamente es necesario derivar la expresión (1–1), obteniéndose

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \alpha) \tag{1–3}$$

y la aceleración por

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x \tag{1–4}$$

donde se ve que en un movimiento armónico simple, la aceleración es proporcional y opuesta al desplazamiento. En la figura 1–3 se ven las fases relativas de x, v y a en función del tiempo.

1.2. Valor medio, valor eficaz y otros valores

Además de a través de la función que describe el movimiento, en la práctica se utilizan otras formas de expresar algunas de las características de esa función,

Valor de pico de una función El que da la máxima desviación de la posición de equilibrio en un elemento que oscila. Para una función armónica del tipo $x = A \operatorname{sen} \omega t$ es simplemente la amplitud A.

Valor pico a pico de una función El que da el recorrido máximo de un elemento que oscila. Para un movimiento descrito por una función armónica es $2A$, el doble de la amplitud.

Valor medio de una función Se define el valor medio de una función $x(t)$ en un periodo (o en general en un cierto intervalo de tiempo T) como

$$x_{medio} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \tag{1–5}$$

Obviamente el valor medio de una función armónica en un periodo es cero.

Valor eficaz o cuadrático medio de una función Se define el valor eficaz o valor cuadrático medio de una función $x(t)$ en un periodo (o en general en un cierto intervalo de tiempo T) como la raíz cuadrada del valor medio de su cuadrado, es decir

$$x_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt} \tag{1–6}$$

El valor eficaz es quizás el parámetro más significativo, ya que está directamente relacionado con la energía. También se le denomina valor *rms*† de la función. Para una función armónica resulta ser el valor de pico dividido por $\sqrt{2}$

Valor medio rectificado de una función Se define como

$$x_{mr} = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|dt \tag{1–7}$$

y es, para una función armónica el valor de pico multiplicado por $2/\pi$.

1.3. La notación vectorial compleja del movimiento armónico

Una forma muy interesante de representar un movimiento oscilatorio es a través de un vector que rota en el plano complejo. Antes de presentar ésto, recordemos que un vector complejo expresado en forma módulo argumental está relacionado con el mismo vector expresado explícitamente a través de la ecuación de Euler,

$$\begin{aligned} Ae^{i\theta} &= A(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \\ Ae^{-i\theta} &= A(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta) \end{aligned} \tag{1–8}$$

donde $i = \sqrt{-1}$. Consideremos en concreto el vector complejo

$$x = Ae^{i(\omega t+\alpha)}. \tag{1–9}$$

en el plano imaginario (véase la figura 1–4). Este vector gira en el plano complejo con una velocidad angular constante ω en el sentido antihorario, formando en el instante inicial $t = 0$ un ángulo α con la horizontal o eje real. La proyección horizontal de este vector puede escribirse como

$$A\cos(\omega t + \alpha)$$

y representa la parte real del vector complejo. La proyección vertical del vector es

$$A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

† del inglés *root mean square*

y representa su parte compleja. Es precisamente esta representación la que ha dado el nombre de frecuencia angular a la magnitud ω.

Si el desplazamiento viene dado por la parte real de (1–9), la velocidad vendrá dada por la parte real de su derivada

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = i\omega A e^{i(\omega t+\alpha)} \quad \Rightarrow \quad v(t) = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \alpha). \tag{1–10}$$

Asimismo, la aceleración será la parte real de la segunda derivada de (1–9)

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A e^{i(\omega t+\alpha)} \quad \Rightarrow \quad a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x. \tag{1–11}$$

Si se tiene en cuenta que multiplicar un número complejo por $i = e^{\pi/2}$ implica un adelanto de fase de $\pi/2$ en el plano complejo, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración pueden representarse gráficamente como se ve en la figura 1–4

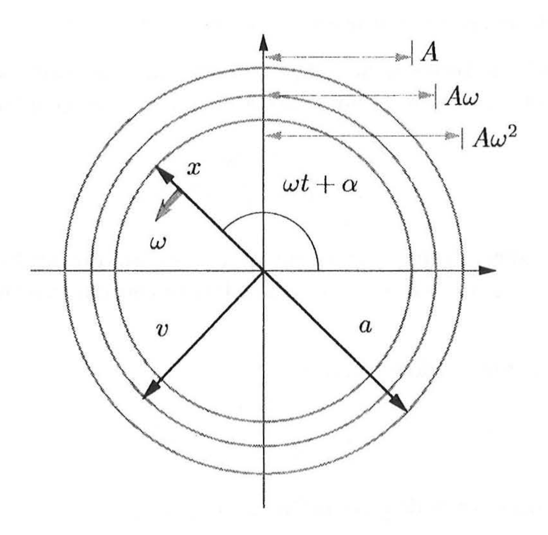


Figura 1–4 Desplazamiento, velocidad y aceleración del movimiento armónico representadas en notación compleja

1.4. Superposición de movimientos armónicos

1.4.1. Superposición de movimientos armónicos en la misma dirección

Igual dirección e igual frecuencia

Consideremos la superposición de dos movimientos armónicos simples de distintas amplitudes, pero igual dirección y frecuencia. El desplazamiento de la partícula producido por cada uno de los movimientos armónicos será

$$x_1 = A_1 e^{i(\omega t+\alpha_1)} \quad \Rightarrow \quad x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$$
$$x_2 = A_2 e^{i(\omega t+\alpha_2)} \quad \Rightarrow \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

tanto en notación compleja como en notación real. La superposición de los dos movimientos dará el desplazamiento resultante de la partícula, dado en forma real por

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) = A \cos(\omega t + \alpha)$$

aunque es más sencillo expresarlo en forma compleja,

$$x = x_1 + x_2 = A_1 e^{i(\omega t+\alpha_1)} + A_2 e^{i(\omega t+\alpha_2)} = e^{i\omega t}\left[A_1 e^{i\alpha_1} + A_2 e^{i\alpha_2}\right] = A e^{i(\omega t+\alpha)} \tag{1–12}$$

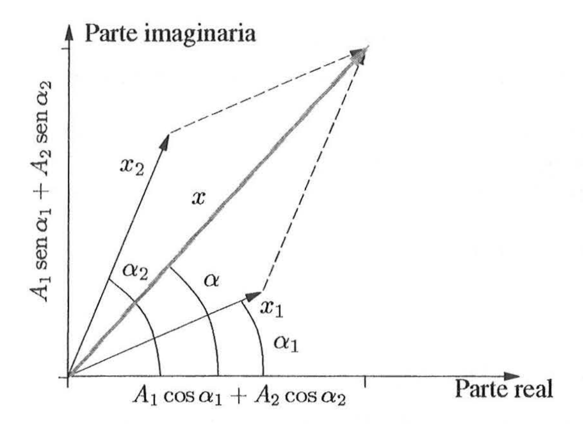


Figura 1–5 Superposición de dos movimientos armónicos de igual dirección y frecuencia. En la figura se representa la suma compleja de ambos. Se ha eliminado el término de la exponencial compleja de $i\omega t$, que supone una rotación de todos los vectores con frecuencia angular ω.

que es un movimiento armónico de la misma frecuencia que los dos movimientos armónicos que se componen, pero de distinta amplitud y en general de distinta fase, que se representa en la figura 1–5, donde se ha eliminado el término $e^{i\omega t}$ que supone una rotación de los distintos vectores con frecuencia angular ω. A partir de la aritmética de los complejos, o gráficamente, a través de la figura, se obtiene que el cuadrado de la amplitud viene dado por

$$A^2 = [A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2]^2 + [A_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + A_2 \operatorname{sen} \alpha_2]^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta$$

con $\delta = \alpha_1 - \alpha_2$ la diferencia de fases entre los dos movimientos, mientras que la fase será

$$\tan \alpha = \frac{A_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + A_2 \operatorname{sen} \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}$$

Igual dirección pero distinta frecuencia.

En este caso, la situación es más compleja y el movimiento resultante no es armónico simple. Los movimientos armónicos a componer son

$$x_1 = A_1 e^{i(\omega_1 t + \alpha_1)}$$
$$x_2 = A_2 e^{i(\omega_2 t + \alpha_2)}$$

Cuando se tienen movimientos superpuestos de distintas frecuencias, la fase de cada uno de ellos pierde su significado ya que la diferencia de fase entre los dos movimientos depende del instante de tiempo en el que se analice, como se verá a continuación. Por este motivo consideraremos nulas las dos fases de los movimientos iniciales en este caso de distintas frecuencias lo que nos simplificará las expresiones.

Para estudiar este problema escribamos $\omega_1 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ y $\omega_2 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$. En función de las sumas y las diferencias la resultante de la superposición de los dos movimientos queda en la forma

$$x = x_1 + x_2 = \left[A_1 e^{i\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t} + A_2 e^{-i\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t}\right] e^{i\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t}. \qquad (1\text{–}13)$$

La amplitud del movimiento resultante viene dada por la raíz de

$$A^2 = \left[A_1 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) + A_2 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\right]^2 + \qquad (1\text{–}14)$$
$$\left[A_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) - A_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\right]^2 =$$
$$A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t]$$

El movimiento parecería ser una oscilación de frecuencia angular $(\omega_1 + \omega_2)/2$ y amplitud dada por (1–14), pero la fase resultante también contiene una dependencia temporal, que en cada instante vendría dada, respecto de $e^{i\omega t}$ por

$$\tan \gamma_{tot}(t) = \frac{A_1 \operatorname{sen} \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t -_2 \operatorname{sen} \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t}{A_1 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + A_2 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t} = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t}{\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t} = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \tan \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \quad (1\text{–}15)$$

por lo que la frecuencia angular no será realmente $(\omega_1 + \omega_2)/2$, sino que irá cambiando con el tiempo como corresponde a la solución

$$x = A e^{i\gamma_{tot}(t)} e^{i\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t} \quad (1\text{–}16)$$

y el movimiento no será armónico simple.

Como se ve, a pesar de todo, el cuadrado de la amplitud sí varía con el tiempo de forma armónica en torno a un valor $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$, en lo que se denominan pulsaciones. Esta variación se puede observar en la figura 1–7. Cuando las frecuencias son distintas, el ángulo entre los dos vectores varía con el tiempo, de forma que cuando tienen la misma dirección y sentido la amplitud es $A_1 + A_2$ mientras que cuando tienen la misma dirección pero distinto sentido la amplitud es $|A_1 - A_2|$. Así, se observa un movimiento resultante cuya amplitud varía con una frecuencia igual a la diferencia de las frecuencias, aunque a menudo ésto no se aprecia bien en el movimiento resultante.

Un caso particular interesante se tiene cuando las dos frecuencias están próximas entre sí. En este caso $\gamma_{tot}(t)$ varía muy lentamente frente a $(\omega_1 + \omega_2)/2$ y puede considerarse constante a lo largo de unos cuantos periodos. En estas condiciones, el movimiento resultante puede describirse de forma aproximada como un movimiento armónico de frecuencia angular $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2 \approx \omega_1 \approx \omega_2$ cuya amplitud varía lentamente entre $A_1 + A_2$ y $A_1 - A_2$ con una frecuencia angular $\omega_1 - \omega_2$, como en el caso que se muestra en la parte superior de la figura 1–7.

Otro caso interesante se tiene cuando las dos amplitudes son iguales. En este caso, la oscilación de la amplitud es entre 0 y $2A$, como se muestra en la parte inferior de la figura 1–7. La superposición de las dos oscilaciones es ahora, a partir de la ecuación (1–13)

$$x = x_1 + x_2 = \left[A e^{i\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t} + A e^{-i\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t} \right] e^{i\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t}.$$

que queda como

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) e^{i\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t}.$$

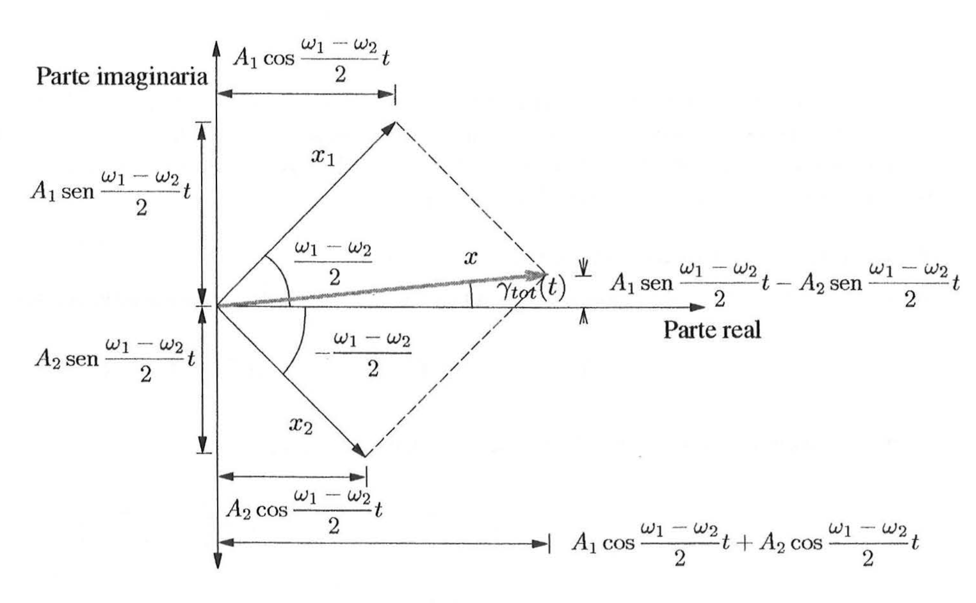


Figura 1–6 Superposición de dos movimientos armónicos de igual dirección y distinta frecuencia. En la figura se representa la suma compleja de ambos. En este caso no es posible sacar factor común la exponencial compleja, y sólo es posible sacar una expresión sencilla para la envolvente de la amplitud. En esta representación se ha descontado la rotación con frecuencia angular $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ dada por la exponencial compleja de $i\omega t$.

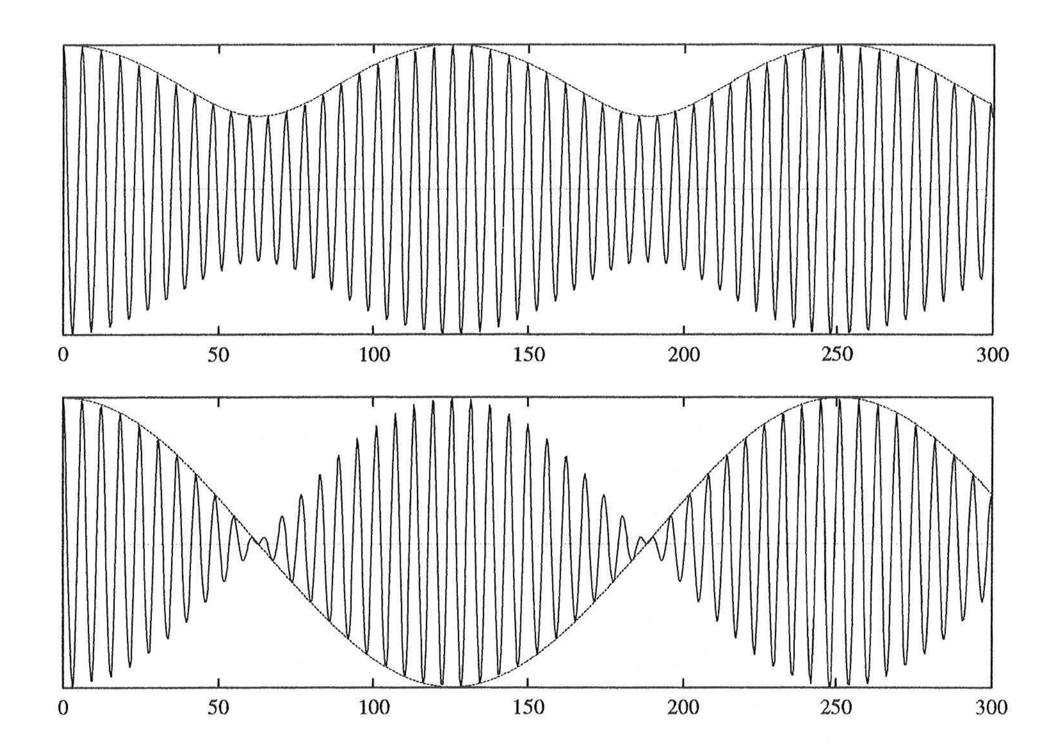


Figura 1–7 Pulsaciones resultantes de la composición de dos movimientos armónicos simples de frecuencias distintas pero próximas.

La parte real de la ecuación anterior se escribe como

$$x = \left[2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \right] \qquad (1\text{–}17)$$

obteniéndose también pulsaciones. Se denomina frecuencia de las pulsaciones al número de veces por unidad de tiempo que el desplazamiento total pasa de un mínimo al siguiente mínimo a través de un máximo. El periodo de la pulsación será obviamente el tiempo en el que la amplitud recorre un ciclo completo.

El fenómeno de las pulsaciones es muy frecuente, especialmente en vibraciones sonoras. Dos notas muy próximas de intensidad muy similar producen fluctuaciones en la intensidad de frecuencia igual a la diferencia entre las frecuencias de las notas. La frecuencia angular observada no es en realidad la frecuencia angular de variación de la amplitud, $(\omega_1 - \omega_2)/2$, sino el doble, que es precisamente la diferencia de frecuencias angulares $(\omega_1 - \omega_2)$, como se ve en la figura 1–7, coincidiendo en ésto los resultados para iguales o distintas amplitudes.

1.4.2. Superposición de movimientos armónicos perpendiculares

Superposición de movimientos armónicos perpendiculares de la misma frecuencia.

Consideremos ahora el siguiente caso, una partícula se mueve en el plano de forma que tanto su coordenada x como su coordenada y oscilan siguiendo un movimiento armónico simple. Consideremos en primer lugar el caso en el que los dos movimientos tienen la misma frecuencia, teniéndose para sus coordenadas x e y

$$x = A_x \operatorname{sen} \omega t \qquad (1\text{–}18)$$

$$y = A_y \operatorname{sen}(\omega t + \delta) \qquad (1\text{–}19)$$

donde δ es la diferencia de fase entre las oscilaciones x e y. Como es obvio, la trayectoria de la partícula estará limitada por el rectángulo definido por los valores límite de las componentes x e y, $\pm A_x$ y $\pm A_y$. Si las dos componentes están

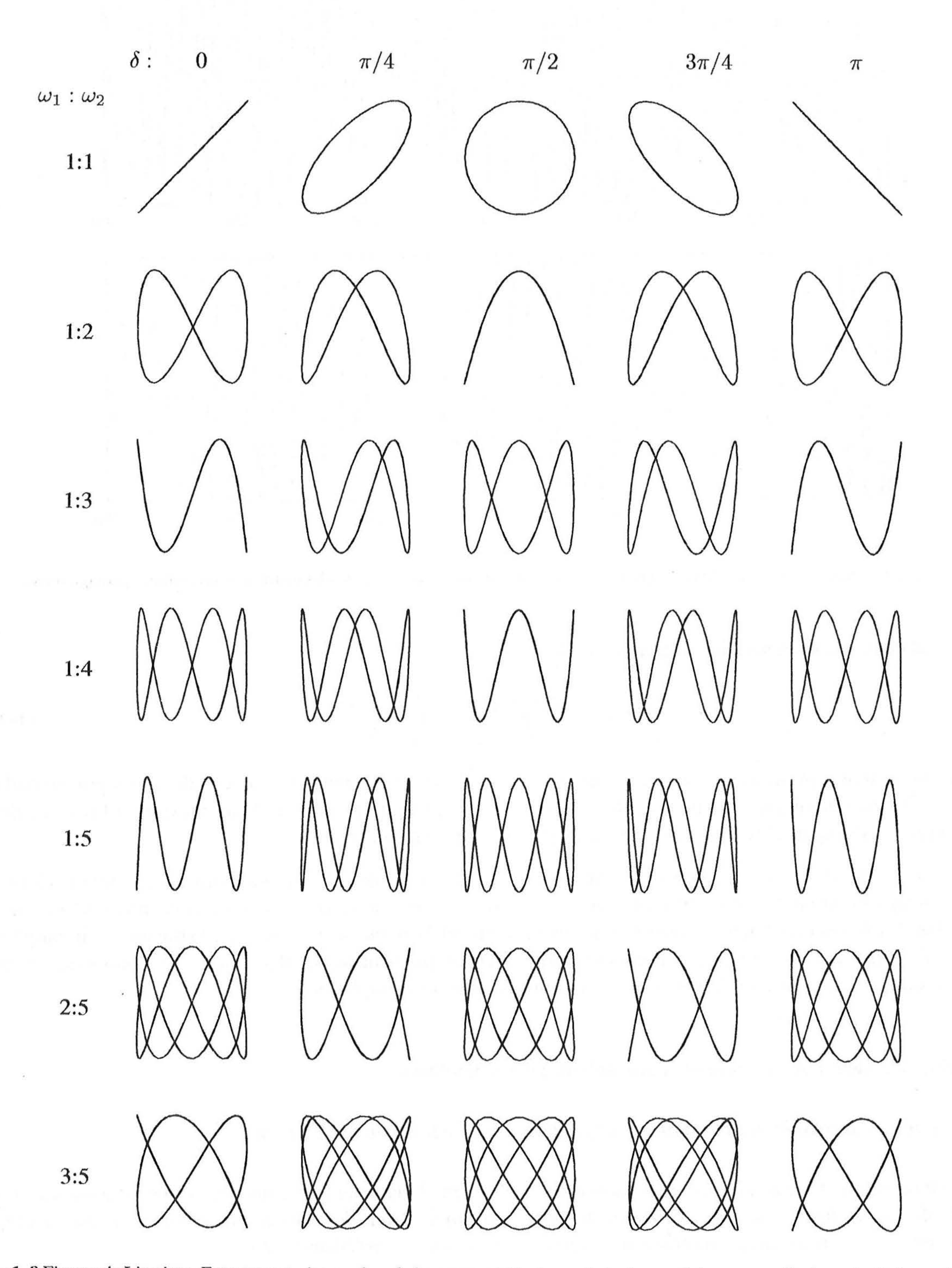


Figura 1–8 Figuras de Lissajous. Estas trayectorias resultan de la superposición de movimientos armónicos perpendiculares de distintas relaciones de frecuencias ($\omega_1 : \omega_2$) y distintos desfases δ.

en fase, la partícula describe un movimiento armónico simple a lo largo de la recta dada por

$$y = \frac{A_y}{A_x} x$$

y ocurre lo mismo si las dos componentes están en oposición de fase, pero con el movimiento armónico teniendo lugar a lo largo de

$$y = -\frac{A_y}{A_x} x$$

en ambos casos con una amplitud $\sqrt{A_x^2 + A_y^2}$. La superposición de dos movimientos armónicos simples de la misma frecuencia y perpendiculares entre sí da lugar, cuando la diferencia de fase δ entre ambos es de 0 o π, a un movimiento armónico simple a lo largo de una línea recta. Se habla en este caso de *polarización lineal*.

Cuando la diferencia de fases δ es $\pi/2$ se tiene

$$y = A_y \operatorname{sen}(\omega t + \pi/2) = A_y \cos \omega t$$

y se dice que los dos movimientos están en cuadratura. De las ecuaciones que dan las dos componentes se tiene

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1$$

que es la ecuación de una elipse de radios principales A_x y A_y que se recorre en sentido horario. Para un desfase de $-\pi/2$ (o $3\pi/2$) se tiene la misma elipse, pero recorrida en sentido antihorario. En este caso se dice que tenemos *polarización elíptica*, con los radios principales de la elipse dirigidos según las direcciones x e y de los dos movimientos que se componen.

Para el caso particular $A_x = A_y$, la elipse se transforma en una circunferencia, teniéndose en este caso la denominada *polarización circular*. Cuando la diferencia de fase tiene un valor arbitrario la trayectoria también es elíptica, pero con los radios principales rotados respecto a los ejes de coordenadas.

Superposición de movimientos armónicos perpendiculares de distintas frecuencias

Un caso muy interesante es aquél en el que se superponen movimientos armónicos perpendiculares de distintas frecuencias, amplitudes y diferencias de fase, de la forma

$$\begin{aligned} x &= A_x \operatorname{sen} \omega_1 t \\ y &= A_y \operatorname{sen}(\omega_2 t + \delta) \end{aligned} \qquad (1\text{–}20)$$

Las trayectorias resultantes dependen de la relación de frecuencias ω_2/ω_1 y de la diferencia de fase δ. Se denominan *figuras de Lissajous* a las trayectorias resultantes y ejemplos de las mismas se muestran en la figura 1–8 para distintos desfases y relaciones entre frecuencias en las que éstas son estables.

Capítulo 2
Vibraciones mecánicas

Índice

2.1. Grados de libertad

Diremos que un sistema mecánico tiene un grado de libertad si su posición geométrica puede expresarse en cada instante en función de una única variable. Consideremos, por ejemplo, el caso de un pistón que se mueve en un cilindro, su posición queda completamente determinada en cualquier instante especificando la distancia entre el pistón y el fondo del cilindro y por tanto es un sistema con un grado de libertad. Un peso suspendido de un resorte de forma que no pueda moverse más que en una dirección es también un ejemplo de sistema oscilante de un único grado de libertad.

En general si son necesarias n variables para especificar completamente la posición de un sistema mecánico, decimos que el sistema tiene n grados de libertad. Así por ejemplo, un disco que se moviera en el plano sin restricciones tendría tres grados de libertad, por una parte los desplazamientos x e y de su centro de gravedad y por otra parte el ángulo de rotación alrededor de ese centro de gravedad. Un cilindro que cae rodando por un plano inclinado tiene un grado de libertad, pero si baja en parte rodando y en parte deslizando tiene dos grados de libertad, uno de translación y uno de rotación.

Un sólido rígido que se mueve libremente tiene seis grados de libertad, tres de translación que dan la posición en el espacio de su centro de masas en cada instante, y tres de rotación. Por lo tanto son necesarias seis coordenadas para expresar su posición en el espacio.

No necesariamente un sistema de un grado de libertad es un sistema simple. Por ejemplo, un motor de automóvil, con toda su complejidad mecánica, si está montado rígidamente tiene la posición de todos sus elementos en cada instante de tiempo descrita por una única variable, que puede ser el ángulo de giro del cigüeñal. El valor de ese ángulo determina la posición de todos los elementos móviles del motor y por tanto el sistema tiene un único grado de libertad. Si el motor está montado sobre unos muelles como ocurre en realidad, el número de grados de libertad aumenta.

En el otro extremo se tienen los sistemas de infinitos grados de libertad, como es el caso de un elemento flexible como una viga. Cargándola adecuadamente es posible deformarla en prácticamente cualquier forma (por supuesto dentro de los límites de resistencia y respetando las restricciones impuestas por los apoyos). La descripción de esta curva requiere una función $f(x)$ que es equivalente a un número infinito de grados de libertad. En cada posición x en la viga se puede conseguir una deflexión y distinta de las que hay en los otros puntos y por tanto, en el caso más general, para

determinar la posición de todos los elementos de la viga se necesita conocer tantas deflexiones como posiciones en la viga.

2.2. El oscilador libre

2.2.1. La ecuación diferencial del oscilador libre

Consideremos un sistema con un grado de libertad sometido a una fuerza recuperadora proporcional al desplazamiento, de la forma $F = -k_r x$. Como $F = ma$, la ecuación de movimiento del sistema vendrá dada por

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k_r x = 0 \tag{2–1}$$

que, si denominamos $\omega_0 = \sqrt{k_r/m}$ a la frecuencia angular natural de oscilación del sistema, queda como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2–2}$$

La solución general de esta ecuación diferencial es una función armónica de la forma seno o coseno que oscila con la frecuencia natural del sistema,

$$x = A\cos(\omega_0 t - \alpha_c) \qquad \text{o} \qquad x = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t - \alpha_s) \tag{2–3}$$

o una superposición de éstas. Como se vio en la sección 1.3 esta solución también se expresa en forma de una exponencial compleja

$$x = Ae^{i(\omega_0 t - \alpha_c)} \tag{2–4}$$

siendo soluciones también tanto la parte real como la parte compleja.

2.2.2. Energía del oscilador libre

Obtengamos ahora las energías cinética y potencial del oscilador libre. En cualquier momento la energía potencial E_p será $\frac{1}{2}k_r x^2$ siendo x el desplazamiento alrededor de la posición de equilibrio y k_r la constante de recuperación. Sustituyendo la solución (2–3) que acabamos de obtener, se tiene para la energía potencial la expresión

$$E_p = \frac{1}{2}k_r x^2 = \frac{1}{2}k_r A^2\cos^2(\omega_0 t - \alpha_c). \tag{2–5}$$

Como vemos la energía potencial no es constante, sino que fluctúa con el movimiento armónico sin hacerse nunca negativa, aunque se hace cero cuando pasa por la posición de equilibrio. Además, alcanza su valor máximo para el punto de máxima amplitud x.

Por otra parte la energía cinética es de la forma

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\,\mathrm{sen}^2(\omega_0 - \alpha_c) \tag{2–6}$$

La energía cinética es nula cuando x alcanza su valor máximo, ya que en esa posición la velocidad $\dot{x}$ es nula, mientras que es máxima cuando pasa por la posición de equilibrio, ya que es ahí cuando la velocidad es máxima. La variación de la energía cinética es justamente la contraria de la energía potencial.

Por otra parte, la energía total del oscilador debe ser la suma de las energías cinética y potencial,

$$E_t = E_p + E_k = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\left[\cos^2(\omega_0 t - \alpha) + \mathrm{sen}^2(\omega_0 t - \alpha_c)\right] = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \tag{2–7}$$

que se mantiene constante durante el movimiento como debe ser en ausencia de fuerzas disipativas. Esta energía total depende del cuadrado de la amplitud, teniéndose una energía cuatro veces mayor para una amplitud doble. Tanto la energía potencial promedio como la energía cinética promedio del oscilador son la mitad de la energía total.

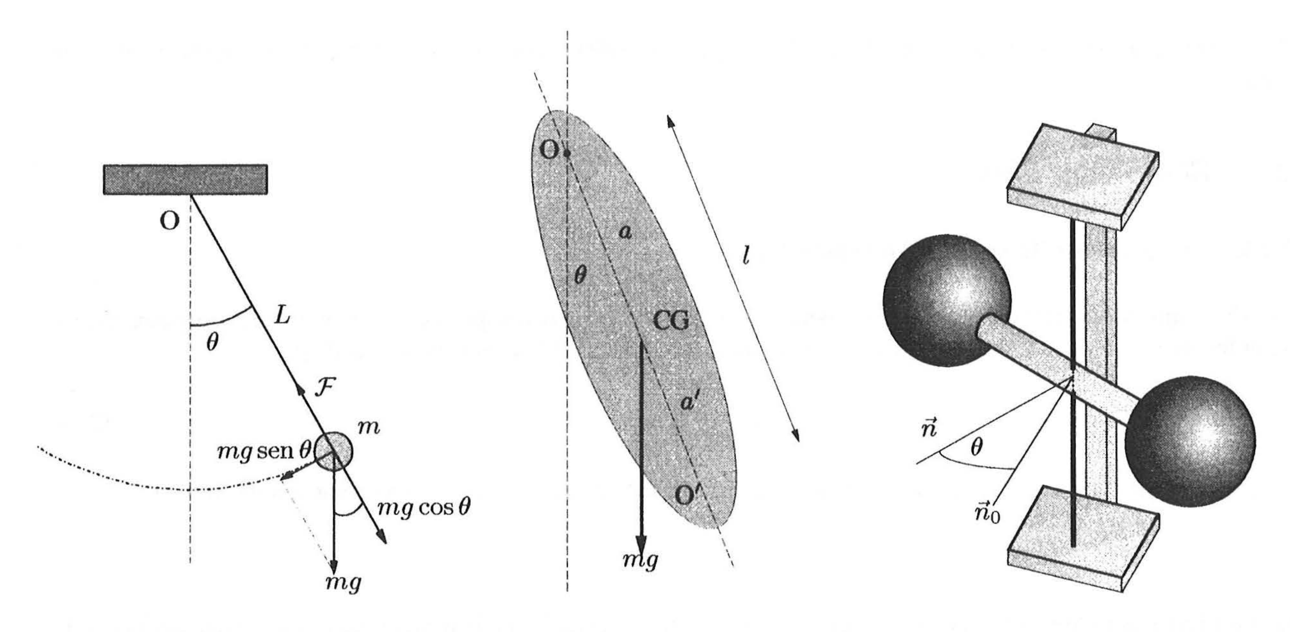


Figura 2–1 Péndulos simple, compuesto y de torsión

2.2.3. El péndulo simple

Consideremos otro ejemplo de movimiento armónico simple, el denominado péndulo simple. Denominamos péndulo simple a un sistema compuesto de una masa m supuestamente puntual suspendida de un punto O mediante una cuerda de longitud L y masa despreciable. Veremos que este péndulo simple describe un movimiento armónico simple cuando se tienen pequeñas oscilaciones de la masa m.

Para estudiar el movimiento de este sistema, escribiremos su ecuación de movimiento y la compararemos con la ecuación (2–2). Sobre la partícula actuarán su peso y la fuerza de tensión $\mathcal{F}$ ejercida por la cuerda. En cada instante la componente radial del peso de la partícula se compensará con la tensión $\mathcal{F}$ de la cuerda, por lo que esta componente no dará movimiento. La componente tangencial del peso será

$$-mg\,\mathrm{sen}\,\theta$$

donde aparece un signo negativo, ya que si la partícula está en la parte positiva ($\theta > 0$), la fuerza está dirigida hacia el sentido contrario. Como en la dirección tangencial no hay más fuerzas actuando sobre la partícula, esta fuerza será igual a la aceleración tangencial, dada por $m\,d^2s/dt^2$ donde s es el arco. La ecuación del movimiento tangencial queda entonces

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta$$

que puede escribirse como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \tag{2–8}$$

Consideremos un caso particular. Si las oscilaciones son pequeñas, podemos hacer la aproximación $\mathrm{sen}\,\theta \approx \theta$ (en radianes), quedando la ecuación (2–8) como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \tag{2–9}$$

Esta ecuación es similar a la ecuación (2–2) con el desplazamiento de la posición de equilibrio medido en ángulos en vez de en distancias, y por tanto describe un movimiento armónico simple $\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t - \alpha)$ de frecuencia angular ω_0 dada por

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \text{y periodo} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{2–10}$$

Ni la frecuencia ni el periodo dependen de la masa del péndulo, únicamente de la longitud de la cuerda y de la aceleración de la gravedad. De hecho éste es un método muy sencillo de medida de la aceleración de la gravedad.

2.2.4. El péndulo compuesto o péndulo físico

Hasta ahora nos hemos referido a oscilaciones pequeñas de un cuerpo que puede ser considerado como un punto material, pero los resultados obtenidos pueden también aplicarse a sistemas más complejos. Consideraremos ahora uno de estos sistemas más complejos, un cuerpo sólido que sometido a la atracción gravitatoria oscila alrededor de un eje horizontal. Se denomina a este sistema péndulo compuesto o péndulo físico.

La dinámica de un cuerpo rígido que gira tiene una cierta similitud con la de un punto material, si en el papel de la coordenada correspondiente se utiliza el ángulo de giro θ en el de la masa, el momento de inercia I (respecto del eje de rotación) y en el de la fuerza el momento de ésta, M.

En éste caso, el momento de la fuerza gravitatoria respecto del eje de rotación es $M = -mga \operatorname{sen}\theta$, siendo m la masa del cuerpo, a la distancia del centro de gravedad del cuerpo (CG) al eje de rotación (que en la figura 2–1 pasa por el punto O perpendicularmente al plano del papel) y θ el ángulo que forma la línea OC con la vertical. El signo menos indica que se trata de un momento recuperador. Como para pequeñas oscilaciones el ángulo es muy pequeño, se puede hacer la aproximación $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, quedando $M \approx -mga\theta$. Si comparamos esta expresión con la expresión de la fuerza recuperadora para un punto material $F = -k_r x$, vemos que la magnitud mga desempeña el papel de la constante recuperadora k_r. Por lo tanto, la frecuencia angular de oscilación del péndulo compuesto será

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}} \tag{2–11}$$

Si comparamos esta expresión con la que nos da la frecuencia angular para el péndulo simple (Ec. (2–10)) se observa que las propiedades del péndulo compuesto coinciden con las de un péndulo simple de longitud

$$l = \frac{I}{ma} \tag{2–12}$$

denominándose a esta magnitud *longitud equivalente* del péndulo compuesto.

Si escribimos el momento de inercia como $I = I_0 + ma^2$, donde I_0 es el momento de inercia del cuerpo respecto del eje horizontal que pasa por el centro de gravedad, la longitud equivalente queda en la forma

$$l = a + \frac{I_0}{ma}$$

Supongamos ahora que el péndulo se suspende del eje que pasa por OC′. En este caso, la longitud equivalente será

$$l' = a' + \frac{I_0}{ma'}$$

Ahora bien, $a' = l - a = I_0/ma$ y por tanto, $l' = l$. Así tenemos que las longitudes equivalentes y por tanto, los periodos de oscilación de un péndulo compuesto suspendido de dos ejes que se hallen entre sí a una distancia l en el eje OC con el centro de gravedad por medio, son iguales.

2.2.5. El péndulo de torsión

Otro ejemplo de movimiento armónico simple se tiene en el péndulo de torsión. En este caso se tiene un cuerpo suspendido de un hilo de forma que éste pasa por el centro de masa del cuerpo.[†]Cuando se rota el cuerpo en el plano horizontal un ángulo θ alrededor de su posición de equilibrio, el hilo se retuerce y ejerce sobre el cuerpo un momento M_t según el eje que se opone al desplazamiento θ y para pequeñas oscilaciones es proporcional al mismo en la forma $M_t = -k_{tors}\theta$ donde k_{tors} es la constante recuperadora a torsión o coeficiente de torsión del hilo. En concreto, para un hilo cilíndrico de diámetro D, longitud L y módulo de rigidez $G = E/2(1+\nu)$, donde E es el módulo de Young y ν el coeficiente de Poisson es de la forma

$$M_t = k_{tors}\theta = \frac{\pi G D^4}{32L}\theta \qquad \text{con} \qquad k_{tors} = \frac{\pi G D^4}{32L}$$

[†]Esto es así cuando el cuerpo está suspendido del hilo. Si se tiene un hilo tenso y el cuerpo está fijo en el medio de ese hilo tenso, sobre este cuerpo actuaría un momento de torsión a través de las dos partes del hilo que se encuentran arriba y abajo, por lo que el momento recuperador total que actúa sobre el cuerpo es $2\,M_t$.

Si I es el momento de inercia del cuerpo respecto al eje del hilo, la ecuación angular de movimiento queda en la forma

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -k_{tors}\theta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k_{tors}}{I}\theta = 0 \tag{2–13}$$

En estas condiciones, el péndulo de torsión describe un movimiento armónico simple de frecuencia angular y periodo dados por

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{tors}}{I}} \qquad\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k_{tors}}} \tag{2–14}$$

2.3. El oscilador amortiguado

En el caso del oscilador armónico simple que acabamos de estudiar las oscilaciones mantienen una amplitud constante. Sin embargo, en la práctica, la amplitud de las oscilaciones de un cuerpo vibrante decrece con el tiempo, el movimiento oscilatorio es en realidad amortiguado.

Para analizar el problema tenemos que considerar la acción de una fuerza de rozamiento. En nuestro caso nos limitaremos al caso en que ésta es proporcional a la velocidad $F_r = -\lambda v$, donde λ es la constante de amortiguamiento y v la velocidad en cada instante, que se ha de añadir a la fuerza recuperadora armónica. Esta fuerza amortiguadora, debida a la viscosidad del medio, se opone al movimiento en cada instante (de ahí el signo negativo). En problemas físicos reales pueden aparecer otros tipos de fuerzas de rozamiento con distintas dependencias con la velocidad. La ecuación de movimiento de un cuerpo sometido a estas dos fuerzas es:

$$F_t = F + F_r = ma = -k_r x - \lambda v$$

que puede escribirse como

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + k_r x = 0 \tag{2–15}$$

o como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 = 0 \tag{2–16}$$

con $2\gamma = \lambda/m$ y $\omega_0^2 = k_r/m$ es la frecuencia angular natural del oscilador o frecuencia angular sin amortiguamiento. Esta ecuación diferencial difiere de la (2–1) para el oscilador armónico libre en el término adicional $2\gamma dx/dt$ debido al amortiguamiento. La solución general de esta ecuación diferencial será una que tenga dos constantes arbitrarias independientes a determinar por las condiciones iniciales.

La solución oscilatoria Probaremos, en notación compleja con una solución general que sea superposición de soluciones del tipo

$$x = Ae^{Bt}$$

en función de la constante arbitraria A (en general compleja) que se determinará en cada caso a partir de las condiciones iniciales (veremos enseguida que B no es independiente). Derivando respecto del tiempo esta expresión y sustituyendo en la ecuación diferencial (2–16) se llega a la siguiente relación

$$B^2 + 2\gamma B + \omega_0^2$$

que da dos posibles soluciones para B,

$$B = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

siendo la solución general superposición de estas dos soluciones,

$$x = e^{-\gamma t}\left[A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}\right]$$

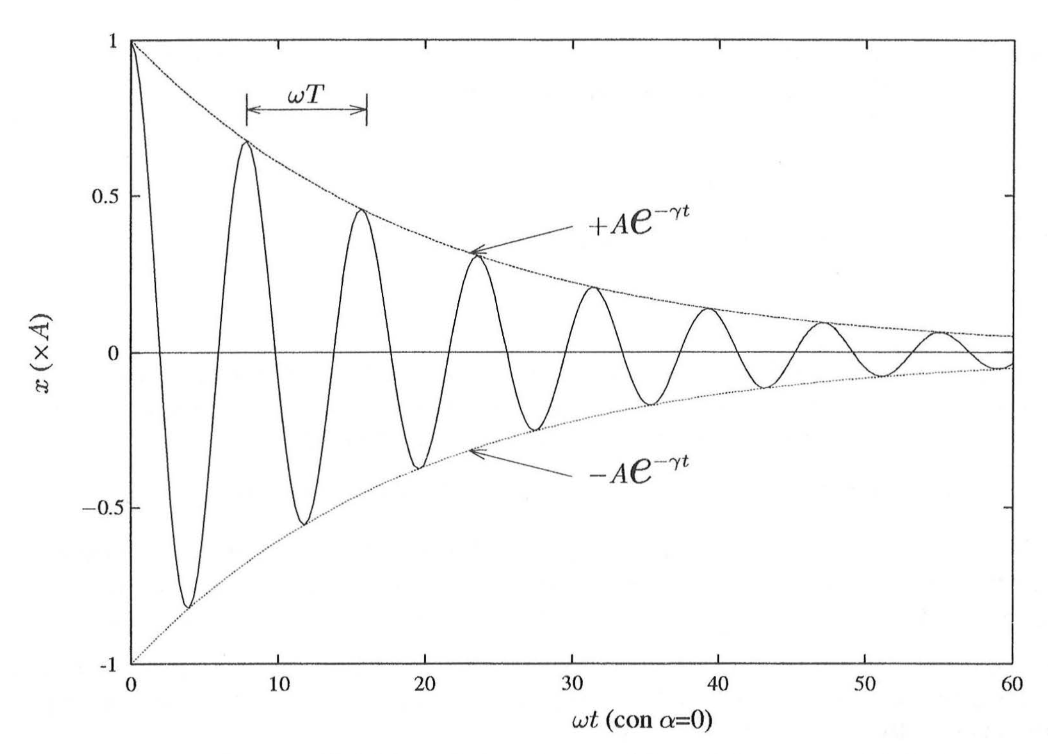


Figura 2–2 Oscilaciones amortiguadas. La amplitud de las oscilaciones decae con el tiempo de forma exponencial y la frecuencia de oscilación ya no es la frecuencia natural del sistema.

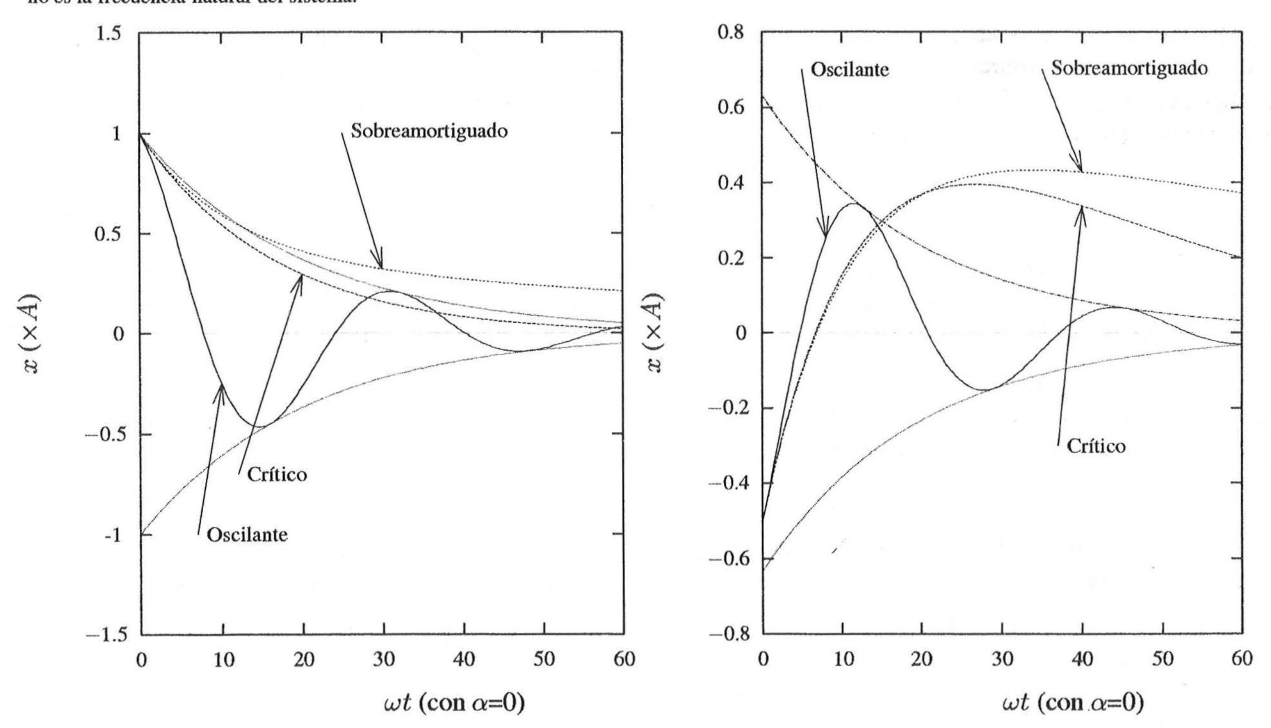


Figura 2–3 Ejemplos de movimientos oscilatorio, sobreamortiguado y con amortiguamiento crítico. Cada una de las figuras corresponde a un valor determinado de la constante de amortiguamiento λ y a unas determinadas condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad.En cada figura se muestra el movimiento resultante para distintos valores de la frecuencia natural del oscilador ω_0

donde hemos denominado ω a

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k_r}{m} - \frac{\lambda^2}{4m^2}} \tag{2–17}$$

La solución física debe ser siempre una solución real, por lo que A_1 y A_2 deben ser complejos conjugados de la forma $A_1 = \frac{1}{2}Ae^{-i\alpha}$ y $A_2 = \frac{1}{2}Ae^{i\alpha}$ y por tanto la solución general será

$$x = \frac{1}{2}Ae^{-\gamma t}\left[e^{i(\omega t-\alpha)} + e^{-i(\omega t-\alpha)}\right] \tag{2–18}$$

Cuando $\omega_0 > \gamma$, ω es real y la solución que se acaba de obtener puede escribirse en la forma

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t - \alpha) \tag{2–19}$$

que corresponde a un movimiento oscilante de frecuencia angular ω dada por (2–17). Como (2–19) con (2–17) contiene dos constantes arbitrarias A y α, es la solución genérica de la ecuación diferencial, determinándose el valor de las constantes A y α a partir de las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad.

Esta solución refleja dos hechos importantes para el movimiento oscilatorio amortiguado:

- La amplitud de las oscilaciones no es constante, y viene dada por $Ae^{-\gamma t} = Ae^{-t/\tau}$, donde $\tau = 1/\gamma$ es el tiempo de relajación. Esta amplitud decrece con el tiempo como corresponde a un movimiento oscilatorio amortiguado y el tiempo que tarda en disminuir un factor e es precisamente el tiempo de relajación.
- La frecuencia (2–17) de la oscilación amortiguada no es la frecuencia de la oscilación libre, sino que depende del amortiguamiento. Esto realmente era de esperar, ya que al frenarse el movimiento aumenta el periodo, es decir, disminuye la frecuencia de las oscilaciones.

Amortiguamiento crítico Según aumenta el amortiguamiento o disminuye la constante recuperadora k_r la frecuencia de las oscilaciones amortiguadas va haciéndose cada vez menor, hasta que se hace 0 para $\omega_0 = \gamma$, teniéndose el amortiguamiento crítico. En este caso una función del tipo $A_2te^{-\gamma t}$ es también solución de la ecuación diferencial, por lo que la solución general de ésta será una función de la forma

$$x = (A_1 + A_2t)e^{-\gamma t} \tag{2–20}$$

donde A_1 y A_2 son constantes a determinar a partir de las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad. Esta solución representa una situación en la que deja de haber oscilaciones y al liberarse la partícula, ésta se aproxima a su posición de equilibrio de forma gradual y sin completar ni siquiera una oscilación completa.

Hay ocasiones en las que el amortiguamiento crítico, en el que el sistema vuelve a su posición de equilibrio de forma rápida pero sin oscilar, es muy interesante. Por ejemplo en los amortiguadores de los coches se intenta que trabajen en condiciones próximas al amortiguamiento crítico, para evitar oscilaciones de excesiva duración.

Movimiento sobreamortiguado Cuando el amortiguamiento es mayor que el amortiguamiento crítico la frecuencia (2–17) se vuelve imaginaria y las exponenciales en (2–18) se hacen reales, teniéndose el oscilador sobreamortiguado. En este caso, si denominamos $s = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4m^2} - \frac{k_r}{m}}$ la solución general de la ecuación diferencial es la superposición de dos exponenciales

$$x = \left[A_1e^{-st} + A_2e^{st}\right]e^{-\gamma t} \tag{2–21}$$

En la figura 2–3 se muestran, para las mismas condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad y el mismo coeficiente de amortiguamiento λ (y, por tanto, la misma γ) las trayectorias seguidas durante el movimiento amortiguado para tres distintos valores de la frecuencia angular natural ω_0, oscilatoria, amortiguamiento crítico y movimiento sobreamortiguado.

Energía de un oscilador amortiguado Estudiemos ahora cómo se disipa la energía en un movimiento armónico amortiguado, en el caso en el que el tiempo de relajación es bastante mayor que el periodo de la parte oscilante. La pérdida de energía del cuerpo en un intervalo de tiempo dt será el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento λv en ese intervalo de tiempo, en el cual el desplazamiento ha sido $\dot{x}dt$,

$$dE = F_{roz}dx = -\lambda \dot{x}^2 dt$$

que puede escribirse como

$$\frac{dE}{dt} = -\lambda \dot{x}^2 = -\frac{2\lambda}{m}\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Si la fuerza de rozamiento es relativamente pequeña, se puede utilizar esta expresión para calcular la pérdida media de energía en un periodo, sustituyendo la energía cinética que aparece por su valor medio. Si tenemos además en cuenta que el valor promedio de la energía cinética de un cuerpo oscilante es la mitad de su energía total (véase la sección 2.2.2) la expresión anterior queda como

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\lambda}{m}E = -2\gamma E \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dE}{E} = -2\gamma dt \qquad (2\text{–}22)$$

en función de la inversa del tiempo de relajación γ que hemos definido anteriormente. Como se observa en la ecuación anterior, la velocidad de disminución de la energía es proporcional a la misma energía. Si integramos la ecuación anterior, se obtiene

$$E = E_0 e^{-2\gamma t} \qquad (2\text{–}23)$$

donde E_0 es la energía en el instante inicial en el que no ha habido aún la acción de las fuerzas de rozamiento, y es igual a $E_0 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$, con ω_0 la frecuencia angular del oscilador libre, m la masa del sistema y A la amplitud inicial del movimiento.† El amortiguamiento de un oscilador poco amortiguado también se caracteriza mediante el factor de calidad Q. Éste es una magnitud adimensional que se define como

$$Q = 2\pi \frac{E}{|\Delta E|} \qquad (2\text{–}24)$$

donde E es la energía total y ΔE es la energía perdida en un periodo.

2.4. El oscilador forzado

En la realidad, en un sistema oscilante siempre están presentes fuerzas de rozamiento de uno u otro tipo, con lo que las oscilaciones "libres" que se produjeron bajo la acción de la fuerza inicial en realidad no son libres sino que van amortiguándose con el tiempo. Por tanto si se quiere tener un sistema que oscile de forma continua sin amortiguamiento aparente es necesario comunicarle la energía perdida a causa de la acción de las fuerzas de rozamiento. Estudiaremos a continuación la situación más simple, que corresponde a una fuerza externa armónica actuando sobre el sistema. En realidad este caso nos permite estudiar multitud de casos, ya que una fuerza externa periódica puede, de acuerdo con el teorema de Fourier que se verá en el capítulo siguiente, descomponerse en una superposición de componentes armónicas. De este modo, si nos encontramos dentro de los límites de validez del principio de superposición, la solución general será la suma de las soluciones generales correspondientes a cada una de las componentes armónicas.

---

†Un método alternativo de obtención de esta ecuación consistiría en escribir la energía total promedio en un ciclo como suma de las energías potencial promedio

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t - \alpha) \quad \Rightarrow \quad E_p = \frac{1}{2}k_r < x^2 > = \frac{1}{4}A^2 k_r e^{-2\gamma t}$$

y cinética promedio

$$\dot{x} = A[-\gamma e^{-\gamma t}\cos(\omega t - \alpha) - \omega e^{-\gamma t}\,\mathrm{sen}(\omega t - \alpha)]$$

$$\Rightarrow \quad E_k = \frac{1}{2}mA^2 e^{-2\gamma t}[-\gamma\cos(\omega t - \alpha) - \omega\,\mathrm{sen}(\omega t - \alpha)]^2$$

$$\Rightarrow \quad < E_k > = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t}$$

quedando la energía total promedio en un ciclo

$$< E > = < E_p > + < E_k > = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t} = \frac{1}{2}k_r A^2 e^{-2\gamma t}$$

Nótese que el promedio se ha realizado únicamente a la parte armónica de las funciones, y no a la exponencial decreciente, de forma consistente con la consideración inicial de débil amortiguamiento y por tanto débil decrecimiento de la amplitud.

2.4.1. Ecuación diferencial del oscilador forzado

Sea $F_{ext} = F_0 \cos \omega_f t$ la fuerza oscilante aplicada, de frecuencia angular ω_f. Si la partícula está sometida a una fuerza recuperadora $-k_r x$ y a una fuerza de amortiguamiento $-\lambda v$, su ecuación de movimiento será $ma = -k_r x - \lambda v + F_0 \cos \omega_f t$. Sustituyendo $v = dx/dt$ y $a = d^2x/dt^2$ se tiene la ecuación diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + k_r x = F_0 \cos \omega_f t \tag{2–25}$$

que puede también escribirse en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 = \frac{F_0}{m}\cos \omega_f t \quad \left(\text{ó} \ = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_f t} \right) \tag{2–26}$$

2.4.2. La solución permanente

La solución general de esta ecuación diferencial consta de dos partes. Una es una expresión similar a la correspondiente al oscilador amortiguado (2–15) que oscila con la frecuencia angular $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ del oscilador amortiguado y otra que oscila con la frecuencia angular de la fuerza aplicada. La primera de las partes se atenúa rápidamente con el tiempo y se hace despreciable, pudiendo ignorarse. Por esta razón se le denomina el término transitorio. La segunda es una solución que oscila con la misma frecuencia angular ω_f de la oscilación forzada. Ésta es la solución permanente. Para obtener esta solución consideraremos que es de la forma

$$x = A_f \cos(\omega_f t - \alpha_c) \tag{2–27}$$

donde se ha dado un signo negativo a α_c por conveniencia. Para obtener los valores de A_f y α_c resulta más cómodo escribir la ecuación (2–27) en forma exponencial compleja:

$$x = A_f e^{i(\omega_f t - \alpha_c)} \tag{2–28}$$

de forma que (2–27) realmente sería la parte real de (2–28), y podemos sustituir en la ecuación diferencial (2–26), obteniéndose

$$(-\omega_f^2 A_f + i2\gamma\omega_f A_f + \omega_0^2 A_f) e^{i\omega_f t} e^{-i\alpha_c} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_f t}.$$

Esta expresión se puede reagrupar como

$$[(\omega_0^2 - \omega_f^2) + i2\gamma\omega_f] A_f = \frac{F_0}{m} e^{i\alpha},$$

y la primera parte escribirse como

$$(\omega_0^2 - \omega_f^2) + i2\gamma\omega_f = \sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}\, e^{i \arctan \frac{2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}}$$

lo que nos da un valor para la amplitud de (2–27) y (2–28)

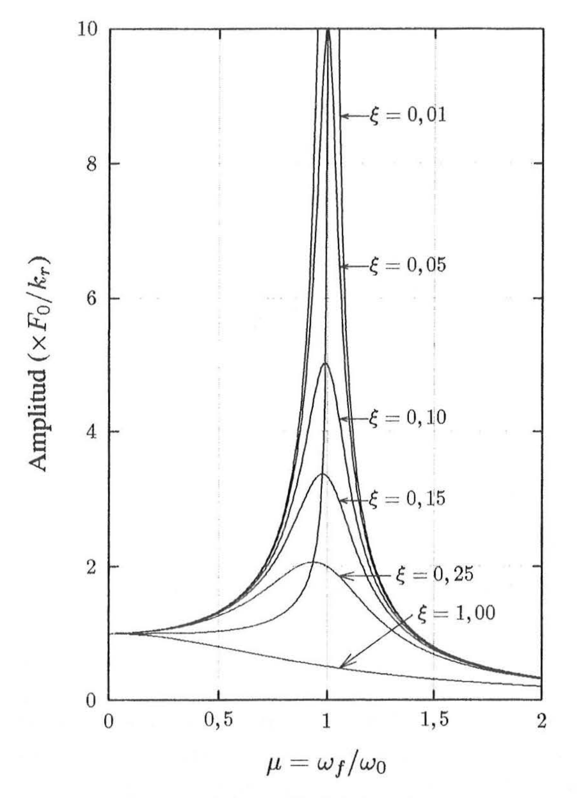
$$A_f = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} = \frac{F_0}{k_r}\frac{1}{\sqrt{(1-\mu^2)^2 + 4\xi^2\mu^2}} \tag{2–29}$$

con $\mu = \omega_f/\omega_0$ el factor de frecuencias y $\xi = \gamma/\omega_0$ el factor de amortiguamiento. Con la solución en la forma (2–27) la fase queda

$$\tan \alpha_c = \frac{2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2} = \frac{2\xi\mu}{1-\mu^2} \tag{2–30}$$

Si en vez de como (2–27) hubiéramos expresado la solución en la forma

$$x = A_f \operatorname{sen}(\omega_f t - \alpha_s) \tag{2–31}$$



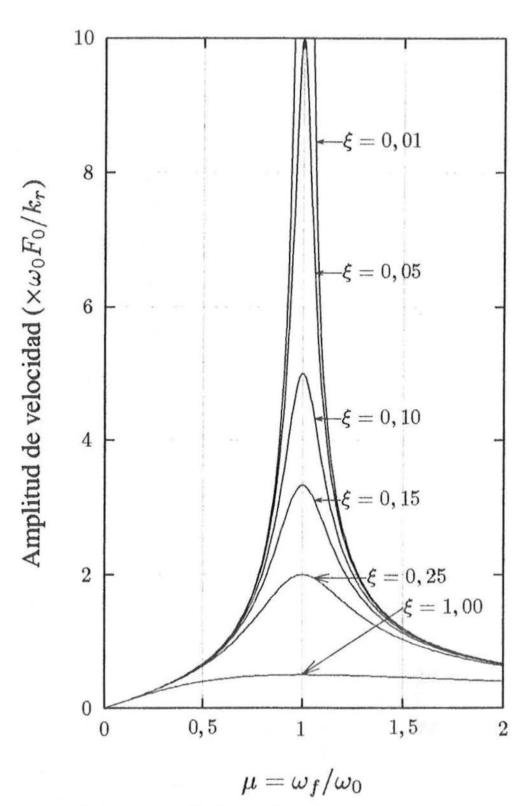


Figura 2–4 Variación de la amplitud de la oscilación (a) y de la amplitud de la velocidad (b) para oscilaciones forzadas en función de la razón de frecuencias $\mu = \omega_f/\omega_0$ para distintos valores del factor de amortiguamiento ξ. La línea adicional de la parte (a) une los máximos de cada una de las curvas.

la amplitud habría sido la misma, pero la fase habría sido

$$\tan \alpha_s = \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega_f} = \frac{\mu^2 - 1}{2\xi\mu} \tag{2–32}$$

Tanto la amplitud A_f como la fase inicial α ya no son constantes arbitrarias, sino cantidades fijas que dependen de la frecuencia angular ω_f de la fuerza aplicada y de γ, la inversa del tiempo de relajación τ. Las oscilaciones forzadas no están amortiguadas, sino que tienen amplitud constante y frecuencia igual a la de la fuerza aplicada. La fuerza aplicada supera a las fuerzas de amortiguamiento y proporciona la energía necesaria para mantener las oscilaciones.

Como corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden, sigue habiendo dos constantes arbitrarias en la solución general que se determinan a partir de las condiciones iniciales, ya que, como se decía al principio, la solución general es la superposición de las dos soluciones, la transitoria y la permanente. Un ejemplo de superposición de estas dos soluciones se muestra en la figura 2–5 para un caso ficticio.

En la figura 2–4a se representan las amplitudes de la oscilación y de la velocidad en función de la razón de frecuencias $\mu = \omega_f/\omega_0$ para distintos valores del factor de amortiguamiento $\xi = \gamma/\omega_0$. Consideremos ahora algunos límites interesantes:

Excitación de baja frecuencia, ($\omega_f \ll \omega_0$; $\mu \ll 1$)

En estas condiciones, la frecuencia angular ω_f de la fuerza excitadora es pequeña y por tanto la razón de frecuencias μ lo es también. De la ecuación (2–30) se tiene para la fase que $\alpha_c = 0$ y de la ecuación (2–29) que $A_f = F_0/k_r$, igual al desplazamiento que produciría F_0 sobre el resorte de constante de recuperación k_r si actuara en condiciones estáticas.

Es decir, para una excitación de baja frecuencia, *la respuesta del sistema está en fase con la excitación*. El sistema tiene el tiempo suficiente para adaptarse en cada momento a las condiciones de la excitación.

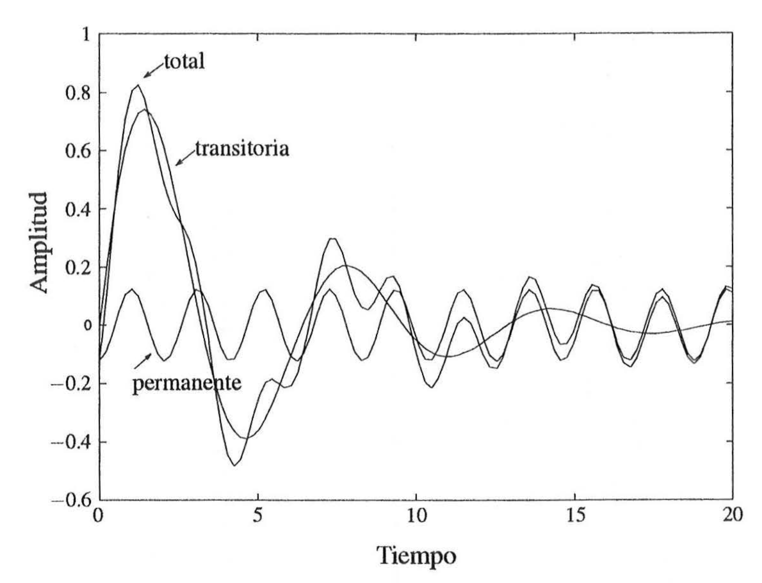


Figura 2–5 Superposición de las soluciones permanente y transitoria en un oscilador forzado.

Excitación de alta frecuencia, ($\omega_f \gg \omega_0$; $\mu \gg 1$)

En este caso la pulsación de la fuerza excitadora es mucho mayor que la frecuencia angular natural del sistema. De la ecuación (2–30) se tiene que $\tan \alpha_c = 0$ y de la rama de la tangente correspondiente se tiene que $\alpha_c = \pi$. A partir de la ecuación (2–29) se tiene que para este caso, la amplitud de la oscilación forzada es muy pequeña.

Es decir, para una excitación de alta frecuencia, *la respuesta del sistema está en oposición de fase con la fuerza excitadora.* Como la frecuencia de la pulsación excitadora es tan grande, el sistema apenas puede responder a ella oscilando, y por tanto la amplitud de la oscilación es muy pequeña, e intenta oponerse a la pulsación excitadora.

Resonancia en amplitud, ($\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$; $\mu = \sqrt{1-2\xi^2}$)

La amplitud tiene un máximo cuando el denominador de (2–29) es mínimo. Esto ocurre para la frecuencia angular $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$. Cuando la frecuencia angular ω_f de la fuerza aplicada es igual a ω_a, se dice que hay resonancia en amplitud. Cuanto menor es el amortiguamiento más pronunciada es la resonancia, y cuando ξ es cero esta amplitud se hace infinita para $\omega_a = \omega_0 = \sqrt{k_r/m}$. En la figura se muestra también la variación de la razón de frecuencias a la que se produce la resonancia en amplitud para distintos valores del factor de amortiguamiento ξ.

Resonancia en frecuencias o en energías, ($\omega_f = \omega_0$; $\mu = 1$)

Consideremos ahora la velocidad del oscilador forzado, a partir de la expresión (2–31) en forma de seno

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega_f A_f \cos(\omega_f t - \alpha_s) = v_0 \cos(\omega_f t - \alpha_s) \tag{2–33}$$

la amplitud de la velocidad es

$$v_0 = \omega_f A_f = \frac{\omega_f F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} = \frac{\omega_0 F_0}{k_r} \frac{\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)^2 + 4\xi^2\mu^2}} \tag{2–34}$$

Como se ve, la amplitud de velocidad también varía con ω_f y alcanza su valor máximo cuando $\omega_f = \omega_0$ (y $\mu = 1$) con independencia del valor de ξ, como se ve en la figura 2–4b. Para esta frecuencia de la fuerza aplicada, la velocidad y, por tanto, la energía cinética de las oscilaciones son máximas y se tiene resonancia en energía.

En condiciones de resonancia en energía ($\omega_f = \omega_0$), la fase α_s de la velocidad es 0° y por lo tanto, la velocidad está en fase con la fuerza excitadora. Obviamente, éstas son las condiciones más favorables para la transferencia de energía

al oscilador, ya que el trabajo realizado por unidad de tiempo sobre el oscilador por la fuerza aplicada es Fv, que es una cantidad siempre positiva cuando F y v están en fase.

Veamos esto en más detalle. En el caso general, fuera de la resonancia en energías, la potencia media absorbida en un periodo es:

$$< \dot{W} >= \frac{1}{T}\int_0^T F_e(t)v(t)dt \tag{2–35}$$

con $F_e = F_0 \cos\omega_f t$ y $v = v_0\cos(\omega_f t - \alpha_s) = \omega_f A_f \cos(\omega_f t - \alpha_s)$ (Ec. 2–33). Con estos valores, la ecuación anterior queda

$$< \dot{W} >= F_0\omega A_f \frac{1}{T}\int_0^T \cos(\omega_f t - \alpha_s)\cos\omega_f t\, dt$$

y desarrollando el coseno, se tiene

$$\frac{1}{T}\int_0^T (\cos\omega_f t\cos\alpha_s + \operatorname{sen}\omega_f t \operatorname{sen}\alpha_s)\cos\omega_f t\, dt =$$
$$\cos\alpha_s \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\omega_f t\, dt + \frac{1}{T}\cos\alpha_s \int_0^T \operatorname{sen}\omega_f t\cos\omega_f t\, dt.$$

El promedio correspondiente al primer sumando es el bien conocido promedio de una función $\cos^2$ en un ciclo, que es $1/2$. En el segundo sumando se promedia la expresión $\operatorname{sen}\omega_f t\cos\omega_f t = \operatorname{sen} 2\omega_f t$ que es una función impar cuyo promedio en el ciclo es cero. Así, la potencia promedio (2–35) queda

$$< \dot{W} >= \frac{1}{2}F_0\omega_f A_f \cos\alpha_s. \tag{2–36}$$

Teniendo en cuenta la relación trigonométrica $\cos\alpha = 1/\sqrt{1+\tan^2\alpha}$ y la expresión (2–32), el coseno del ángulo de fase α_s queda

$$\cos^2\alpha_s = \frac{1}{1+\tan^2\alpha_s} = \frac{1}{1+\dfrac{(\omega_f^2-\omega_0^2)^2}{4\gamma^2\omega_f^2}} = \frac{4\gamma^2\omega_f^2}{(\omega_f^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega_f^2} = \frac{4\xi^2\mu^2}{(\mu^2-1)^2+4\xi^2\mu^2}$$

y sustituyendo además los valores de A_f (eq. 2–29) queda

$$< \dot{W} >= \frac{1}{2}F_0\omega_f \frac{F_0/k_r}{\sqrt{(\mu^2-1)^2+4\xi^2\mu^2}}\frac{2\xi\mu}{\sqrt{(\mu^2-1)^2+4\xi^2\mu^2}} = \frac{F_0^2\omega_0}{k_r}\frac{\xi\mu^2}{(\mu^2-1)^2+4\xi^2\mu^2} \tag{2–37}$$

que se representa en la figura 2–6. Como ya se ha visto, el máximo valor de la potencia absorbida por el oscilador corresponde a una frecuencia de la oscilación forzada igual a la frecuencia natural del sistema.

En este caso se tiene la resonancia en frecuencia, siendo, como se ve en la figura 2–6a mayor la intensidad en el movimiento del oscilador cuanto menor sea ξ. A partir de la ecuación (2–37) se pueden obtener los factores de frecuencia a los que la potencia promedio es la mitad de su valor máximo. Estos son $\mu_1 = \sqrt{1+\xi^2}+\xi$ y $\mu_2 = \sqrt{1+\xi^2}-\xi$, por lo que la semianchura de la curva de potencia dada en (2–37) es 2ξ. Cuanto menor es el amortiguamiento, más agudo es el máximo de la resonancia y más alta y estrecha es la curva de la misma.

En condiciones de resonancia, el valor máximo del desplazamiento es

$$x_{máx} = \frac{F_0}{2m\omega_0\gamma}$$

inversamente proporcional a la inversa del tiempo de relajación γ, lo que obliga a no despreciar el rozamiento del sistema en condiciones de resonancia, incluso si este rozamiento es pequeño.

Comparemos ahora el valor máximo del desplazamiento $x_{máx}$ con el que sufriría el cuerpo cuando actúa sobre él una fuerza estática igual a F_0 (sin la dependencia armónica). Éste último sería $x_{est} = -F_0/k_r$, que con $k_r = m\omega_0^2$ da la siguiente relación entre ambos desplazamientos

$$\frac{x_{máx}}{x_{est}} = \frac{\omega_0}{2\gamma}.$$

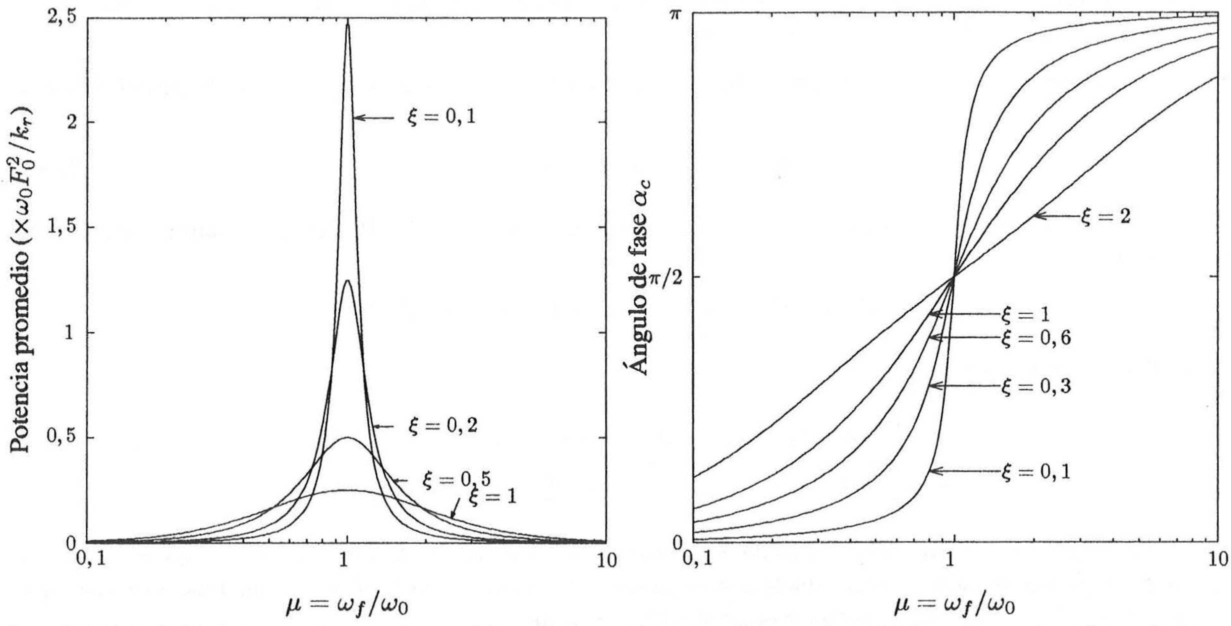


Figura 2–6 (a) Variación de la potencia promedio con el factor de frecuencias μ para distintos valores del factor de amortiguamiento. (b) Dependencia de la fase α_c con el factor de frecuencias μ para distintos valores del factor de amortiguamiento.

Para sistemas poco amortiguados esta relación puede alcanzar un valor muy elevado. En general, cuando el amortiguamiento es muy pequeño, no hay gran diferencia entre las frecuencias correspondientes a la resonancia en amplitud y a la resonancia en energía. Para pequeño amortiguamiento se puede ver que el cociente entre la frecuencia angular natural ω_0 y la semianchura de la curva de potencia 2–6 (diferencia de frecuencias entre los puntos en los que la potencia se hace la mitad de su valor máximo) coincide con el factor de calidad que se ha visto anteriormente,

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \tag{2–38}$$

de forma que el factor de calidad nos indica cómo es la resonancia de aguda.

En la figura 2–6b se observa como a medida que aumenta ω_f la fase tiende a π, es decir, el desplazamiento del sistema tiende a estar en oposición de fase con la fuerza excitadora. Para un amortiguamiento muy débil ($\xi \ll 1$), la fase α_c cambia bruscamente de 0 a π para $\omega_f = \omega_0$, pasa de concordancia de fase a oposición de fase con solo aumentar un poco la frecuencia angular ω_f de la fuerza excitadora. Esto ayuda a explicar el origen de la amplificación de las oscilaciones en condiciones resonantes. Cuando la frecuencia de la fuerza externa es distinta de la frecuencia natural del oscilador, las fases de esta fuerza y de la velocidad son algo distintas, por lo que siempre hay una parte del movimiento en el que ambas son opuestas, frenándose el movimiento. En cambio en la resonancia, ambas fases coinciden de forma que la fuerza actúa siempre en el sentido del movimiento, favoreciéndolo siempre. Algo similar, aunque con una fuerza no armónica se tiene cuando se empuja a un niño en un columpio. En cada ciclo se realiza un pequeño trabajo sobre el niño que da lugar a una pequeña amplificación de las oscilaciones, pero que al cabo de varios ciclos da lugar a grandes oscilaciones.

El conocimiento del fenómeno de la resonancia es de gran importancia tanto si interesa utilizarlo para ampliar las oscilaciones como si lo que interesa es justo lo contrario, minimizar su efecto.

2.5. Resonancia paramétrica

La acción de una fuerza periódica externa no es la única forma de producir una resonancia. También se puede llegar a una situación resonante a través de una variación periódica de los parámetros del sistema oscilatorio, en lo que se denomina resonancia paramétrica. Un ejemplo muy familiar se tiene en la persona que, al balancearse en un columpio, se agacha cuando cae y se incorpora cuando llega al punto más alto, variando de forma periódica la posición de su centro de gravedad.

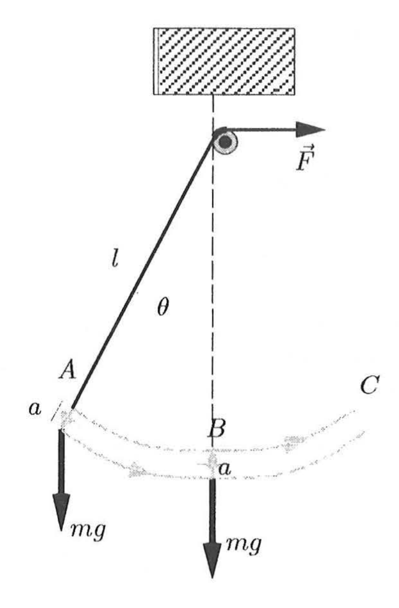


Figura 2–7 Péndulo de longitud variable como ejemplo de oscilador paramétrico.

Para ver como funciona este mecanismo recurriremos al siguiente ejemplo. Consideremos un péndulo en el que es posible acortar o alargar la longitud de la cuerda durante el movimiento del péndulo. Supongamos que cada vez que el péndulo pasa por la posición de equilibrio (es decir, por la vertical) la fuerza externa tira del péndulo, desplazándolo una pequeña distancia a (pequeña en comparación con la longitud l del péndulo) y en cambio, en cada posición extrema, cuando el péndulo forma un ángulo θ_0 con la vertical, la cuerda desciende la misma distancia a, como se muestra en la figura 2–7. Así, en cada periodo, el péndulo se habrá alargado dos veces y se habrá acortado otras tantas y por tanto, la frecuencia de variación de la longitud del péndulo es dos veces mayor que la frecuencia de las oscilaciones propias. Como el alargamiento en el extremo tiene lugar cuando el péndulo está inclinado un ángulo θ, la altura a la que desciende será $a\cos\theta$, menor que la altura a que se eleva al pasar por la posición de equilibrio.

De esta forma, para cada subida de la cuerda al pasar por la posición de equilibrio B, la fuerza externa que la acciona realiza un trabajo contra la fuerza gravitatoria

$$W_B = mga$$

mientras que el trabajo realizado al bajar la cuerda en la posición extrema A (o C) es

$$W_A = -mga\cos\theta_0$$

al ser $a\cos\theta_0$ el cambio de altura en este extremo. Además, la fuerza externa realiza un trabajo contra la fuerza centrífuga. Como el valor de esta última es mv_B^2/l (con v_B la velocidad máxima del péndulo) en la posición vertical B y cero en las posiciones extremas A y C, el trabajo total realizado por la fuerza externa contra la fuerza centrífuga en cada trayecto desde la izquierda hacia la derecha es

$$W^{cf} = W_A^{cf} + W_B^{cf} = 0 + m\frac{v_B^2}{l}a = m\dot{\theta}_B^2 la$$

donde $\dot{\theta}_B$ es el valor máximo de la velocidad angular, que tiene lugar cuando la masa pasa por la posición de equilibrio. Si el desplazamiento del péndulo viene dado por la ecuación $\theta = \theta_0\cos(\omega_0 t - \alpha)$, la velocidad angular en cada punto de su movimiento será $\dot{\theta} = \omega_0\theta_0[-\operatorname{sen}(\omega t - \alpha)] = -\omega_0\theta_0\operatorname{sen}(\omega t - \alpha)$ y su cuadrado será $\dot{\theta}^2 = \omega_0^2\theta_0^2\operatorname{sen}^2(\omega t - \alpha)$, por lo que su valor máximo será precisamente $\dot{\theta}_B^2 = \omega_0^2\theta_0^2 = \theta_0^2 g/l$, quedando el trabajo realizado contra la energía cinética como

$$W^{cf} = mg\theta_0^2 a$$

El trabajo total realizado por la fuerza F en el trayecto ABC será entonces

$$W_{ABC} = mga(1 - \cos\theta_0) + mg\theta_0^2 a = mga(1 - \cos\theta_0 + \theta_0^2).$$

Si las oscilaciones son pequeñas puede desarrollarse en serie el coseno, quedando

$$W_{ABC} = mga\frac{3\theta_0^2}{2}$$

y por tanto para un ciclo completo el trabajo realizado por la fuerza F será

$$W_{ciclo} = 3mga\theta_0^2 = 6\frac{a}{l}\frac{mv_0^2}{2}. \qquad (2–39)$$

El trabajo realizado por la fuerza externa sobre el péndulo es positivo y proporcional a la energía del mismo. De este modo, la energía del péndulo aumenta de forma sistemática, con un pequeño incremento en cada periodo, proporcional a la misma energía y a la magnitud a/l.

Como vemos, la variación periódica de los parámetros del sistema oscilatorio puede implicar un aumento sistemático de la energía total E, con una velocidad de aumento proporcional a esta energía E,

$$\frac{dE}{dt} = 2\kappa E$$

siendo κ una constante pequeña. Como se observa, esta relación es parecida a la ecuación (2–22) para el oscilador amortiguado con la importante diferencia de que la derivada es ahora positiva en vez de negativa y por tanto hay un aumento continuo de la energía, que resulta depender exponencialmente del tiempo.

Como en realidad siempre hay un cierto rozamiento que tiende a amortiguar las oscilaciones, para que efectivamente haya resonancia paramétrica con amplificación, el factor de amplificación κ debe ser superior a un cierto valor mínimo, que resulta ser igual a la constante de amortiguamiento γ debida a la acción de las fuerzas de rozamiento.

2.6. Aislamiento de vibraciones

Consideremos la situación en la que la fuerza excitadora está desarrollada por una máquina. Parte de esta fuerza es transmitida a la base a través del sistema muelles-amortiguadores. Éste puede considerarse como una fuente de vibraciones que actúa sobre el suelo. En general se intentará escoger los elementos aislantes más apropiados para que la fuerza transmitida sea lo menor posible.

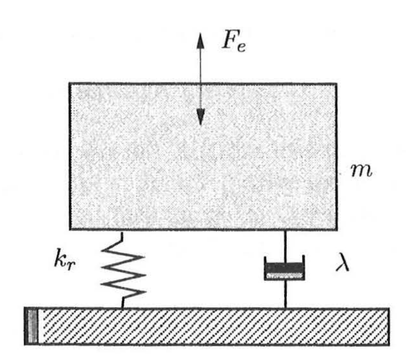


Figura 2–8 Aislamiento de las vibraciones producidas por una máquina

Consideremos una fuerza excitadora de la forma $F_{ext} = F_0 \cos\omega_f t$. A través del sistema aislante se transmitirá una fuerza a la base, con una componente elástica pura dada por $k_r x$ y una componente de amortiguamiento puro, dada por λv, ya que las fuerzas sobre la masa son respectivamente $-k_r x$ y $-\lambda v$. La fuerza total transmitida será la suma de ambas componentes y estará dada por

$$F_{trans} = \lambda\dot{x} + k_r x = \lambda\frac{dx}{dt} + k_r x \qquad (2–40)$$

Como se acaba de ver, el desplazamiento x de la masa m viene dado, en notación compleja por $x = A_f e^{i(\omega_f t - \alpha_c)}$, y su derivada por $\dot{x} = i\omega_f A_f e^{i(\omega_f t - \alpha_c)}$. La expresión (2–40) anterior quedaría como

$$F_{trans} = \lambda i\omega_f A_f e^{i(\omega_f t - \alpha_c)} + k_r A_f e^{i(\omega_f t - \alpha_c)} = A_f(k_r + i\lambda\omega_f) e^{i(\omega_f t - \alpha_c)}$$

Si escribimos el término entre paréntesis en función de $k_r = m\omega_0^2$ y de $2\gamma = \lambda/m$, esta expresión queda en la forma

$$F_{trans} = A_f m(\omega_0^2 + i2\gamma\omega_f) e^{i(\omega_f t - \alpha_c)}$$

pudiéndose escribir el término entre paréntesis en forma exponencial compleja como

$$\omega_0^2 + i2\gamma\omega_f = \sqrt{\omega_0^4 + 4\gamma^2\omega_f^2}\, e^{i \arctan \frac{2\gamma\omega_f}{\omega_0^2}}$$

Si tenemos en cuenta el valor de la amplitud de las oscilaciones forzadas de (2–29), la expresión anterior puede escribirse como

$$F_{trans} = F_0 \frac{\sqrt{\omega_0^4 + 4\gamma^2\omega_f^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} e^{i \arctan \frac{2\gamma\omega_f}{\omega_0^2}} e^{i(\omega_f t - \alpha_c)} \quad (2\text{–}41)$$

El cociente entre las amplitudes de la fuerza oscilante aplicada y la fuerza oscilante transmitida es la transmisibilidad que queda entonces como

$$T = \frac{F_{trans}^0}{F^0} = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4\gamma^2\omega_f^2}{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} \quad (2\text{–}42)$$

en función de la frecuencia angular propia del oscilador ω_0 y de la inversa del tiempo de relajación $\gamma = \lambda/2m$. A menudo esta expresión se escribe en función del factor de amortiguamiento $\xi = \lambda/2m\omega_0$ y de la razón de frecuencias $\mu = \omega_f/\omega_0$, quedando en la forma

$$T = \frac{F_{trans}^0}{F^0} = \sqrt{\frac{1 + 4\xi^2\mu^2}{(1 - \mu^2)^2 + 4\xi^2\mu^2}} \quad (2\text{–}43)$$

El objetivo sería conseguir el mínimo valor de T. Consideraremos varios casos:

- **Si** $T = 1$ La base recibiría la totalidad de F_0. En este caso sobrarían el muelle y el amortiguador, ya que el mismo resultado se obtendría colocando directamente la máquina sobre la base.
- **Si** $T > 1$ El sistema muelle-amortiguador haría que el sistema percibiera una fuerza aún mayor que la que percibiría si no estuvieran colocados.
- **Si** $T < 1$ En este caso, estamos en las condiciones que interesa conseguir. Para analizar el aislamiento utilizaremos la relación entre la transmisibilidad T y la razón de frecuencias $\mu = \omega_f/\omega_0$ para distintos valores del factor de amortiguamiento ξ como se muestra en la figura 2–9.

  Como se observa en la gráfica la transmisibilidad es menor que la unidad para $\mu = \omega_f/\omega_0 > \sqrt{2}$. Se consigue por lo tanto un buen montaje cuando

  $$\omega_0 < \frac{\omega_f}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{k_r}{m}} < \frac{\omega_f}{\sqrt{2}},$$

  es decir, si el elemento elástico tiene una frecuencia propia baja comparada con la de la fuerza excitadora.

  También se observa que para valores de $\mu > \sqrt{2}$, las curvas correspondientes a factores de amortiguamiento $\xi \neq 0$, es decir para sistemas con amortiguamiento, tienen una posición relativa más alta, en el gráfico, que las que corresponden a amortiguamiento nulo. Ésto podría inducir a pensar en un análisis rápido que dicho amortiguamiento es innecesario. Sin embargo, hay que considerar que además del régimen permanente se tiene el régimen transitorio, en el que si el amortiguamiento es muy pequeño, el sistema vibraría prácticamente con su frecuencia angular natural ω_0 sin que su amplitud apenas disminuya con el tiempo. Así, la combinación de ambos podría dar lugar a daños en el sistema mecánico si el amortiguamiento es muy pequeño.

  En la práctica se fija primero el valor del amortiguamiento en función del término transitorio y de las disponibilidades y después se escoge el valor de la constante de recuperación del sistema.

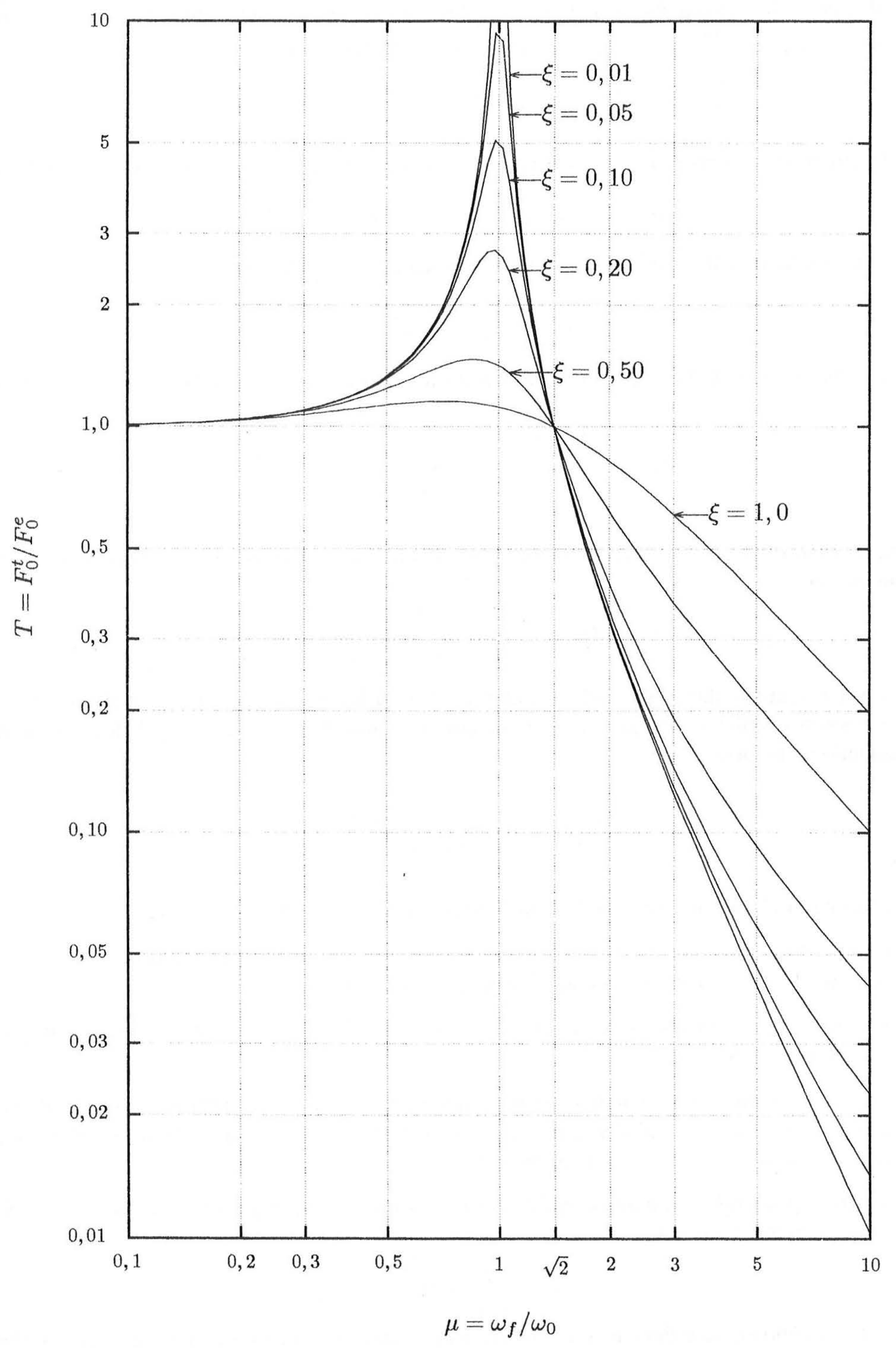


Figura 2–9 Relación entre la transmisibilidad T y la razón de frecuencias $\mu = \omega_f/\omega_0$ para distintos valores del factor de amortiguamiento ξ

Puede verse que el máximo de la curva de transmisibilidad para cada valor del factor de amortiguamiento ξ viene dado por

$$\mu(T_{máx}) = \frac{\sqrt{-1 + \sqrt{1 + 8\xi^2}}}{2\xi} \tag{2–44}$$

que en general estará próximo a $\mu = 1$ salvo que el factor de amortiguamiento sea alto.

Capítulo 3
Sistemas con múltiples grados de libertad.

Índice

3.1. Modos normales de vibración en un sistema con dos grados de libertad

Hemos estudiado las vibraciones de un sistema con un único grado de libertad, tanto en el caso de un sistema no amortiguado, como en el caso de un sistema amortiguado, con o sin la acción de una fuerza armónica. Aunque esto permite obtener información interesante sobre un cierto número de sistemas, está claro que hay muchos otros cuyo estudio no puede abordarse con un tratamiento tan simple.

Subiremos un grado en la escala de complejidad de los sistemas estudiando el caso de sistemas con dos grados de libertad, que ya permite abordar muchos más problemas prácticos, en concreto buena parte de los sistemas de amortiguamiento de vibraciones.

3.1.1. Sistema formado por dos masas acopladas

Comencemos estudiando el sistema oscilante libre con dos grados de libertad que se muestra en la figura 3–1. Este sistema está formado por dos masas acopladas entre sí por un muelle de constante recuperadora k_{r3} y cada una de ellas unida a su vez a un soporte inmóvil mediante muelles de constantes recuperadoras k_{r1} y k_{r2}. Estas masas pueden deslizar libremente sobra la superficie, y por tanto, suponemos que no hay rozamiento entre las masas y dicha superficie, ni tampoco en los muelles. Asimismo supondremos que las masas tienen su movimiento restringido de forma que sólo pueden moverse en la dirección x. Como cada masa puede desplazarse independientemente de su posición de equilibrio el sistema tiene dos grados de libertad.

Calculemos las oscilaciones libres de este sistema. Sobre la masa m_1 actúa por una parte la fuerza que ejerce sobre ella el muelle de constante de recuperación k_{r1}, y por otra la fuerza ejercida por el muelle de acoplamiento entre las dos masas. Si denominamos x_1 y x_2 a los desplazamientos de las masas m_1 y m_2 respecto de su posición de equilibrio (con valores positivos hacia la derecha), la fuerza ejercida sobre la masa m_1 a través del muelle k_{r1} será $-k_{r1}x_1$,

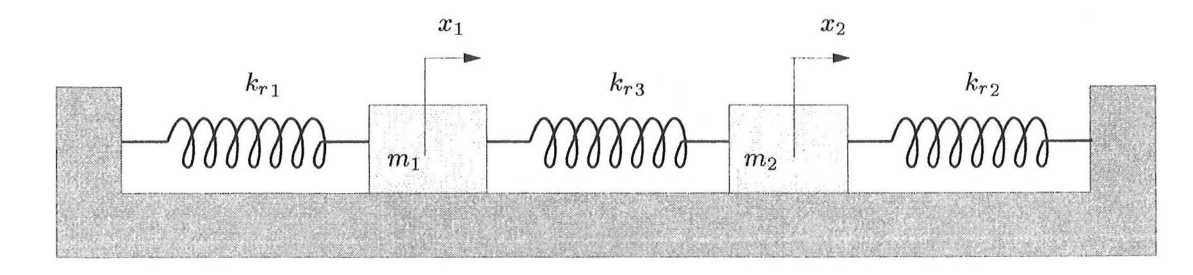


Figura 3–1 Sistema oscilante con dos grados de libertad compuesto por dos osciladores acoplados.

mientras que la fuerza ejercida a través del muelle de acoplamiento será $-k_{r3}(x_1 - x_2)$ al ser $x_1 - x_2$ el acortamiento del muelle de constante k_1. Así, la ecuación de movimiento de la masa m_1 puede escribirse como

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = -k_{r1}x_1 - k_{r3}(x_1 - x_2) \quad \Rightarrow \quad m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + (k_{r1} + k_{r3})x_1 - k_{r3}x_2 = 0 \tag{3–1a}$$

Para la masa m_2, la fuerza ejercida por el muelle de acoplamiento será $k_{r3}(x_1 - x_3)$ y la fuerza ejercida a través del otro muelle $-k_{r2}x_2$. Así, la ecuación de movimiento de la masa m_2 queda

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = -k_{r2}x_2 + k_{r3}(x_1 - x_2) \quad \Rightarrow \quad m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + (k_{r2} + k_{r3})x_2 - k_{r3}x_1 = 0 \tag{3–1b}$$

Deberemos ahora obtener la solución de las ecuaciones de movimiento (3–1a) y (3–1b). Para ello probaremos con soluciones para x_1 y x_2 de la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 e^{i\omega t} \\ x_2 &= A_2 e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{3–2}$$

donde A_1 y A_2 son parámetros genéricos que pueden tener una fase, es decir, ser números complejos. Al sustituir en las ecuaciones anteriores se tiene

$$-m_1\omega^2 A_1 + (k_{r1} + k_{r3})A_1 - k_{r3}A_2 = 0 = [-m_1\omega^2 + (k_{r1} + k_{r3})]A_1 - k_{r3}A_2 \tag{3–3a}$$

$$-m_2\omega^2 A_2 + (k_{r2} + k_{r3})A_1 - k_{r3}A_1 = 0 = [-m_2\omega^2 + (k_{r2} + k_{r3})]A_1 - k_{r3}A_1 \tag{3–3b}$$

Si de las dos ecuaciones despejamos A_1/A_2, se tiene

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{k_{r3}}{-m_1\omega^2 + (k_{r1} + k_{r3})}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{-m_2\omega^2 + (k_{r2} + k_{r3})}{k_{r3}}$$

e igualando los cocientes, deberá cumplirse

$$[m_1\omega^2 - (k_{r1} + k_{r3})][m_2\omega^2 - (k_{r2} + k_{r3})] = k_{r3}^2 =$$

$$m_1 m_2 \omega^4 - (k_{r2} + k_{r3})m_1\omega^2 - (k_{r1} + k_{r3})m_2\omega^2 + (k_{r2} + k_{r3})(k_{r1} + k_{r3}).$$

Desarrollando y dividiendo por $m_1 m_2$ queda

$$\omega^4 - \left[\frac{k_{r1} + k_{r3}}{m_1} + \frac{k_{r2} + k_{r3}}{m_2}\right]\omega^2 + \frac{k_{r1}k_{r2} + k_{r1}k_{r3} + k_{r3}k_{r2}}{m_1 m_2} = 0. \tag{3–4}$$

Se conoce a esta ecuación como la ecuación de frecuencias y da dos soluciones para ω^2. A su vez cada una de éstas da un valor del cociente A_1/A_2. De esta forma vemos que (3–2) con cada uno de los valores de ω^2 corresponden a soluciones del problema.

Consideremos ahora un caso particular de este problema, el caso en el que las dos masas son iguales, $m_1 = m_2 = m$, así como los muelles $k_{r1} = k_{r2} = k_r$. La ecuación (3–4) queda entonces

$$\omega^4 - 2\omega^2 \frac{k_r + k_{r3}}{m} + \frac{k_r(k_r + 2k_{r3})}{m^2} = 0. \tag{3–5}$$

cuyas soluciones son

$$\omega^2 = \frac{k_r + k_{r3}}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{k_r + k_{r3}}{m}\right)^2 - \frac{k_r(k_r + 2k_{r3})}{m^2}} = \frac{k_r + k_{r3}}{m} \pm \frac{k_{r3}}{m} \tag{3–6}$$

que al desarrollar quedan, junto con el cociente A_1/A_2 correspondiente

$$\omega_a^2 = \frac{k_r}{m} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = +1 \tag{3–7a}$$

$$\omega_s^2 = \frac{k_r + 2k_{r3}}{m} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = -1 \tag{3–7b}$$

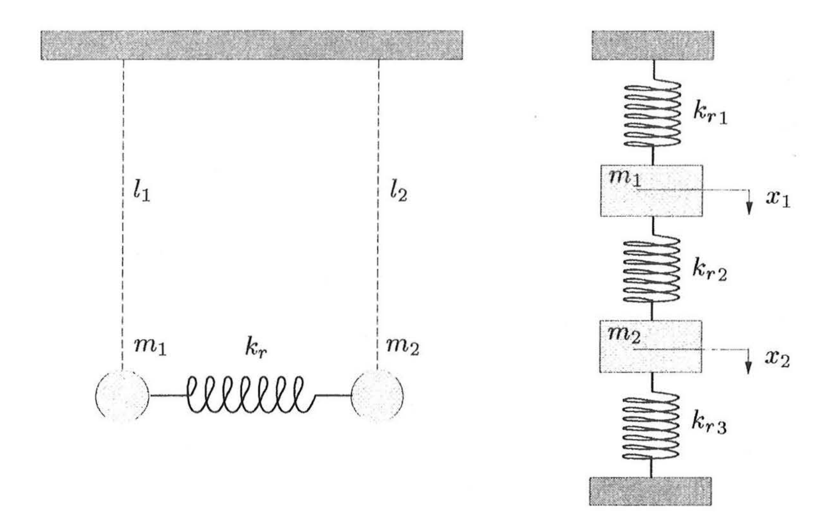


Figura 3–2 Sistema oscilante con dos grados de libertad compuesto por dos péndulos acoplados y por dos osciladores acoplados en vertical.

las cuales corresponden a las dos frecuencias angulares naturales del sistema.

Estos resultados tienen un claro significado. Cuando $A_1/A_2 = 1$ las dos masas se mueven en fase como un todo de forma antisimétrica, siendo en cada instante $x_1 = x_2$. De esta forma, el muelle de acoplamiento no está ni estirado ni comprimido y la frecuencia angular natural del movimiento es $\omega_a^2 = k_r/m = 2k_r/2m$ como correspondería a un sistema de un grado de libertad de masa $2m$ y constante de recuperación $2k_r$.

Por el contrario, cuando $A_1/A_2 = -1$ las dos masas se han movido en todo momento la misma distancia, pero en sentidos opuestos. El movimiento es completamente simétrico y el punto medio del muelle k_{r3} no se mueve. De hecho, si lo pinzáramos, el movimiento seguiría igual. Esto corresponde a movimientos libres con un grado de libertad con cada masa m sujeta a un muelle k_r y a la mitad del otro muelle, que sería como si estuviera sujeta a un muelle $2k_{r3}$. Así, la frecuencia angular natural de cada una de estas masas vendría dada por $\omega_s^2 = (k_r + 2k_{r3})/m$, el muelle contribuye con una fuerza restauradora y aumenta la frecuencia.

De esta forma vemos que hay dos modos de vibración, cada uno con su propia frecuencia. Si perturbamos inicialmente el sistema con $x_1 = x_2$ y lo liberamos el movimiento resultante es un movimiento armónico de frecuencia angular ω_a mientras que si la perturbación inicial es de la forma $x_1 = -x_2$ tenemos también al liberarlo un movimiento armónico, pero ahora de frecuencia angular ω_s. Si la perturbación inicial es una perturbación genérica x_1 y x_2, podemos descomponerla en superposición de dos perturbaciones, una simétrica $x_1^s = -x_2^s = (x_1 - x_2)/2$ y otra antisimétrica $x_1^a = x_2^a = (x_1 + x_2)/2$ quedando $x_1 = x_1^s + x_1^a$ y $x_2 = x_2^s + x_2^a$ en el instante inicial mientras que en cualquier instante de tiempo $x_1(t) = x_1^s(t) + x_1^a(t)$ y $x_2(t) = x_2^s(t) - x_2^a(t)$, si las oscilaciones no son excesivamente grandes y se satisface el principio de superposición.

Las frecuencias angulares ω_s y ω_a serán distintas siempre que haya un muelle de acoplamiento. Así, el movimiento resultante no será armónico, aunque sea la superposición de dos movimientos armónicos, al ser éstos de distintas frecuencias (Véase 1.4.1). Si las frecuencias son próximas podremos tener pulsaciones apreciables, y esto ocurrirá si $k_{r3} \ll k_r$, es decir, si el muelle de acoplamiento es muy blando comparado con los otros muelles

Dos sistemas similares al anterior son el formado por dos péndulos acoplados a través de un resorte de constante de recuperación k_r y el formado por dos masas y tres muelles, pero colocados en posición vertical, como se muestra en la figura 3–2. En concreto el caso de dos masas iguales con hilos de la misma longitud sería equivalente al caso de los dos muelles laterales equivalentes que hemos estudiado.

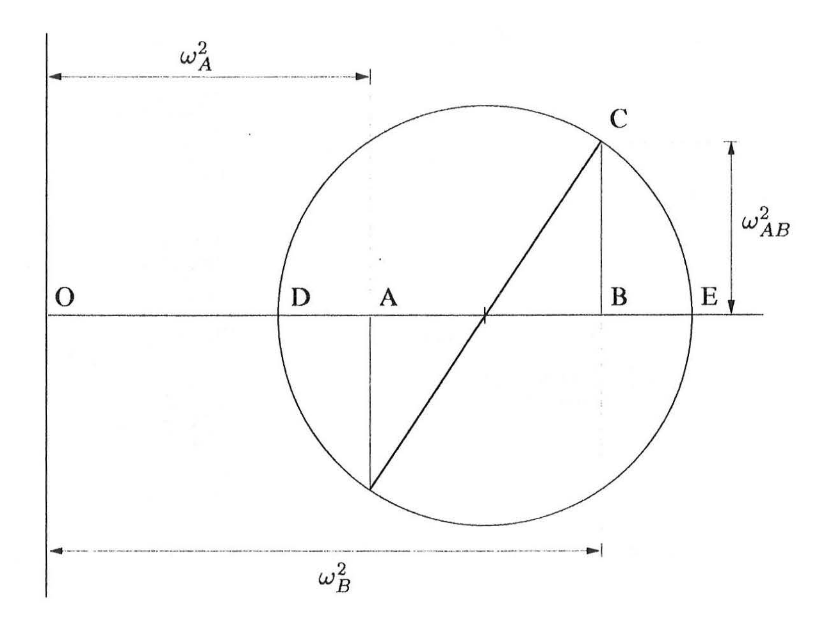


Figura 3–3 Análisis del sistema de dos masas acopladas mediante el círculo de Mohr.

3.1.2. Análisis del sistema de dos masas acopladas mediante el círculo de Mohr

Analizaremos ahora una analogía gráfica del problema anterior basada en el conocido círculo de Mohr de la elasticidad en el plano. Si a partir de los elementos de la ecuación (3–4) definimos las siguientes cantidades,

$$\omega_A^2 = \frac{k_{r1} + k_{r3}}{m_1}, \qquad \omega_B^2 = \frac{k_{r2} + k_{r3}}{m_2},$$

éstas representarán las frecuencias angulares de cada una de las masas de la figura 3–1 cuando se mantiene la otra fija. Asimismo definimos

$$\omega_{AB} = \frac{k_{r3}}{\sqrt{m_1 m_2}}$$

que será una medida de la intensidad del acoplamiento entre los dos osciladores a través del muelle central. En función de estas cantidades, la ecuación (3–4) puede escribirse como

$$\omega^4 - \omega^2(\omega_A^2 + \omega_B^2) + (\omega_A^2\omega_B^2 - \omega_{AB}^4) = 0. \tag{3–8}$$

Aunque no entraremos en detalle en ello, puede verse que, si consideramos en la figura 3–3 las distancias

$$\text{OA} = \omega_A^2, \qquad \text{OB} = \omega_B^2, \qquad \text{BC} = \omega_{AB}^2$$

y dibujamos un círculo centrado en el punto medio entre A y B de radio tal que pase por C, como se muestra en dicha figura, los nuevos puntos D y E que se determinan gráficamente en la misma, permiten obtener el valor de las frecuencias de los modos normales del sistema, a través de

$$\omega_1^2 = \text{OD} \qquad \text{y} \qquad \omega_2^2 = \text{OE}. \tag{3–9}$$

de forma que, si el centro del círculo es

$$\frac{\text{OA} + \text{OB}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{k_{r1} + k_{r3}}{m_1} + \frac{k_{r2} + k_{r3}}{m_2}\right]$$

las frecuencias angulares de los modos normales de oscilación del sistema vienen dadas por

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{k_{r1} + k_{r3}}{m_1} + \frac{k_{r2} + k_{r3}}{m_2}\right] - \frac{k_{r3}}{\sqrt{m_1 m_2}} \tag{3–10a}$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{k_{r1} + k_{r3}}{m_1} + \frac{k_{r2} + k_{r3}}{m_2}\right] + \frac{k_{r3}}{\sqrt{m_1 m_2}} \tag{3–10b}$$

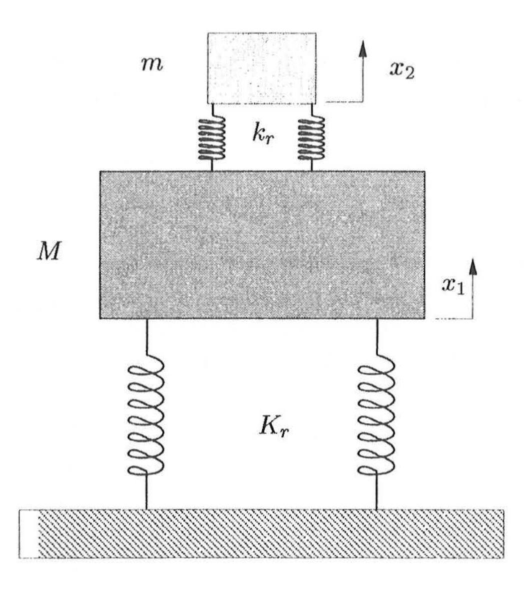


Figura 3–4 El atenuador dinámico de Frahm

Consideremos un par de límites interesantes, en primer lugar cuando no hay acoplamiento (es decir $k_{r3} = 0 \Rightarrow \mathrm{BC} = 0$), los puntos D y E coinciden con los puntos A y B y por tanto, ω_A y ω_B son las frecuencias angulares naturales de cada uno de los muelles.

En segundo lugar se ve claramente que en el caso simplificado que hemos estudiado en el apartado anterior en el que se cumple $m_1 = m_2 = m$ y $k_{r1} = k_{r2} = k_r$ la ecuación anterior nos devuelve los resultados de las ecuaciones (3–7) para las frecuencias. En este caso ω_A^2 y ω_B^2 serían iguales y la línea centrada en el círculo estaría en posición vertical. Cuanto menor sea el acoplamiento menor será el radio del círculo hasta que para un acoplamiento nulo el círculo se convierta en un punto y las dos frecuencias angulares naturales sean iguales.

3.1.3. El atenuador dinámico de vibraciones sin amortiguamiento

Veamos una curiosa aplicación de lo que hemos visto, el atenuador dinámico de vibraciones sin amortiguamiento, que nos ayudará a atenuar las vibraciones transmitidas por una máquina a su base. En el tema anterior hemos estudiado como atenuar estas vibraciones transmitidas mediante la combinación de un resorte y un amortiguador, pero a menudo no es posible atenuar las vibraciones lo suficiente mediante los métodos anteriores. Otra posibilidad es la que analizaremos ahora, el denominado *atenuador dinámico de vibraciones* de Frahm (1909).

Consideremos en el sistema de dos masas descrito en la figura 3–4 en el que la masa M está sometida a la acción de una fuerza armónica de la forma $F_0 \cos \omega_f t$ y la masa m (el atenuador) es una masa pequeña estando k_r y m escogidos de forma que la frecuencia angular natural de vibración del atenuador coincida con la frecuencia angular ω_f de la fuerza excitadora y no existiendo el tercer muelle que teníamos en la figura 3–1. Comprobaremos que en estas condiciones la masa M no vibra en absoluto ya que la masa pequeña m vibra de tal forma que la fuerza en el muelle es en todo momento igual y de signo contrario a $F_0 \cos \omega_f t$. Para ello partiremos de las ecuaciones (3–1) con la particularidad añadida de la fuerza $F_0 \cos \omega_f t$. Así, éstas quedan quedan en la forma

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} + (K_r + k_r)x_1 - k_r x_2 = F_0 \cos \omega_f t \qquad \text{(3–11a)}$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} + k_r(x_2 - x_1) = 0 \qquad \text{(3–11b)}$$

Si expresamos la excitación como $F_0 e^{i\omega_f t}$, las soluciones de este sistema de ecuaciones serán de la forma

$$x_1 = A_1 e^{i\omega_f t} \qquad \text{(3–12a)}$$

$$x_2 = A_2 e^{i\omega_f t} \qquad \text{(3–12b)}$$

ya que las ecuaciones (3–11) contienen únicamente x_1 y x_2 y sus segundas derivadas, que de nuevo llevarían a una función coseno. Así, sustituyendo estas soluciones y dividiendo por $e^{i\omega_f t}$ se tiene

$$A_1(-M\omega_f^2 + K_r + k_r) - k_r A_2 = F_0 \tag{3–13a}$$

$$-k_r A_1 + A_2(-m\omega_f^2 + k_r) = 0 \tag{3–13b}$$

que escribiremos de forma más compacta en función de las magnitudes $x_{est} = F_0/K_r$, que representa el desplazamiento del sistema principal en condiciones estáticas, $\omega_a^2 = k_r/m$, que representa el cuadrado de la frecuencia angular natural del atenuador y $\omega_0^2 = K_r/M$, que representa el cuadrado de la frecuencia angular natural del sistema principal. De esta forma las ecuaciones (3–13) anteriores se escriben como

$$A_1\left(1 + \frac{k_r}{K_r} - \frac{\omega_f^2}{\omega_0^2}\right) - A_2\frac{k_r}{K_r} = x_{est} \tag{3–14a}$$

$$-A_1 + A_2\left(1 - \frac{\omega_f^2}{\omega_a^2}\right) = 0. \tag{3–14b}$$

Si despejamos A_1 y A_2 se obtiene

$$\frac{A_1}{x_{est}} = \frac{1 - \dfrac{\omega_f^2}{\omega_a^2}}{\left(1 - \dfrac{\omega_f^2}{\omega_a^2}\right)\left(1 + \dfrac{k_r}{K_r} + \dfrac{\omega_f^2}{\omega_0^2}\right) - \dfrac{k_r}{K_r}} \tag{3–15a}$$

$$\frac{A_2}{x_{est}} = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\omega_f^2}{\omega_a^2}\right)\left(1 + \dfrac{k_r}{K_r} + \dfrac{\omega_f^2}{\omega_0^2}\right) - \dfrac{k_r}{K_r}} \tag{3–15b}$$

donde se ve claramente que si la frecuencia natural del atenuador coincide con la frecuencia de la oscilación forzada ($\omega_a = \omega_f$), la amplitud A_1 de oscilación de la masa principal se hace 0. En este caso, la ecuación (3–15b) se convierte en $A_2/x_{est} = -K_r/k_r$ y, por tanto, $A_2 = F_0/k_r$ de forma que si la masa M se mantiene quieta y el atenuador oscila como $A_2 \cos\omega_f t = -F_0 \cos\omega_f t/k_r$ y la fuerza en el muelle del atenuador varía como $-F_0 \cos\omega_f t$, igual y opuesta a la fuerza externa.

3.2. Sistemas de n grados de libertad sin amortiguamiento

Según aumenta el número de grados de libertad del problema aumenta la complejidad del mismo, aunque esencialmente no intervengan elementos nuevos. Obtendremos tantas frecuencias naturales y tantos modos normales como grados de libertad tenga el problema. Discutiremos el análisis general para el caso de un sistema de tres grados de libertad ya que para más grados de libertad el procedimiento es análogo.

Consideremos por ejemplo una barra de peso despreciable fija en sus extremos que tiene sobre ella tres masas m_1, m_2 y m_3. Si denominamos x_1, x_2 y x_3 al desplazamiento de cada una de las masas respecto de la posición de equilibrio (con valor positivo hacia arriba) la ecuación de movimiento para la masa m_1 vendrá dada al relacionar $m_1\ddot{x}_1$ con la fuerza total que actúa sobre dicha masa. Esta fuerza total viene dada por la diferencia entre las fuerzas cortantes a ambos lados de la masa m_1 y dependerá de los tres desplazamientos x_1, x_2 y x_3 de una forma en general compleja y difícil de calcular.

En este tipo de problemas se suele representar el efecto de las otras masas a través de la barra mediante los denominados *coeficientes de influencia*, definiéndose, por ejemplo, el coeficiente α_{12} como el desplazamiento (en metros) de la masa m_1 producido por una fuerza de 1 N actuando sobre la masa m_2, es decir, δ_1/F_2. Así tendríamos 3 coeficientes de influencia directos α_{11}, α_{22} y α_{33} y seis indirectos o cruzados, α_{12}, α_{13}, α_{21}, α_{23}, α_{31} y α_{32}. En la práctica se cumple la relación $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ y el valor de los coeficientes puede ser en principio calculado para cualquier sistema por

los métodos habituales utilizados en elasticidad. De esta forma, las ecuaciones de movimiento se escriben como

$$x_1 = -\alpha_{11} m_1 \ddot{x}_1 - \alpha_{12} m_2 \ddot{x}_2 - \alpha_{13} m_3 \ddot{x}_3 \quad (3\text{–}16a)$$
$$x_2 = -\alpha_{21} m_1 \ddot{x}_1 - \alpha_{22} m_2 \ddot{x}_2 - \alpha_{23} m_3 \ddot{x}_3 \quad (3\text{–}16b)$$
$$x_3 = -\alpha_{31} m_1 \ddot{x}_1 - \alpha_{32} m_2 \ddot{x}_2 - \alpha_{33} m_3 \ddot{x}_3 \quad (3\text{–}16c)$$

Si probamos con un conjunto de soluciones del tipo

$$x_1 = A_1 e^{\omega t} \quad (3\text{–}17a)$$
$$x_2 = A_2 e^{\omega t} \quad (3\text{–}17b)$$
$$x_3 = A_3 e^{\omega t} \quad (3\text{–}17c)$$

se obtiene al sustituir

$$A_1 = -\alpha_{11} m_1 \omega^2 A_1 - \alpha_{12} m_2 \omega^2 A_2 - \alpha_{13} m_3 \omega^2 A_3 \quad (3\text{–}18a)$$
$$A_2 = -\alpha_{21} m_1 \omega^2 A_1 - \alpha_{22} m_2 \omega^2 A_2 - \alpha_{23} m_3 \omega^2 A_3 \quad (3\text{–}18b)$$
$$A_3 = -\alpha_{31} m_1 \omega^2 A_1 - \alpha_{32} m_2 \omega^2 A_2 - \alpha_{33} m_3 \omega^2 A_3 \quad (3\text{–}18c)$$

que es un sistema de ecuaciones homogéneo en A_1, A_2 y A_3 de la forma

$$\left(\alpha_{11} m_1 - \frac{1}{\omega^2}\right) A_1 + \alpha_{12} m_2 A_2 + \alpha_{13} m_3 A_3 = 0 \quad (3\text{–}19a)$$
$$\alpha_{21} m_1 A_1 + \left(\alpha_{22} m_2 - \frac{1}{\omega^2}\right) A_2 + \alpha_{23} m_3 A_3 = 0 \quad (3\text{–}19b)$$
$$\alpha_{31} m_1 A_1 + \alpha_{32} m_2 A_2 + \left(\alpha_{33} m_3 - \frac{1}{\omega^2}\right) A_3 = 0 \quad (3\text{–}19c)$$

que tendrá solución si el determinante del mismo es cero,

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} m_1 - \frac{1}{\omega^2} & \alpha_{12} m_2 & \alpha_{13} m_3 \\ \alpha_{21} m_1 A_1 & \alpha_{22} m_2 - \frac{1}{\omega^2} & \alpha_{23} m_3 \\ \alpha_{31} m_1 A_1 & \alpha_{32} m_2 A_2 & \alpha_{33} m_3 - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (3\text{–}20)$$

Al desarrollar este determinante se obtiene una ecuación de tercer orden en $1/\omega^2$ que es la ecuación de frecuencias. A cada una de esas soluciones le corresponde un conjunto de valores A_2/A_1 y A_3/A_1 que determina cómo es la vibración y por tanto hay tres modos normales de vibración.

Analizaremos este problema para el caso más sencillo, en el que todas las masas son iguales $m_1 = m_2 = m_3 = m$ y en vez de la barra tenemos una cuerda tensa de longitud $4l$ con una fuerza tensora $\mathcal{F}$ como se ve en la figura 3–5. Para calcular los coeficientes de influencia analizaremos por separado el efecto producido por el desplazamiento de cada una de las masas y sumaremos los efectos, suponiendo que nos encontramos en el rango en el que el principio de superposición de efectos es aplicable.

Comenzaremos por una fuerza F aplicada sobre la masa m_1. La componente vertical de la fuerza recuperadora para la masa m_1 vendrá dada por la expresión

$$F = \mathcal{F} \cos\alpha_a + \mathcal{F} \cos\alpha_b = \mathcal{F} \frac{\delta_1}{\sqrt{l^2 + \delta_1^2}} + \mathcal{F} \frac{\delta_1}{\sqrt{9l^2 + \delta_1^2}} \approx \mathcal{F}\left(\frac{\delta_1}{l} + \frac{\delta_1}{3l}\right)$$

que nos da también el valor del coeficiente de influencia α_{11},

$$\alpha_{11} = \frac{\delta_1}{F} = \frac{3}{4} \frac{l}{\mathcal{F}}$$

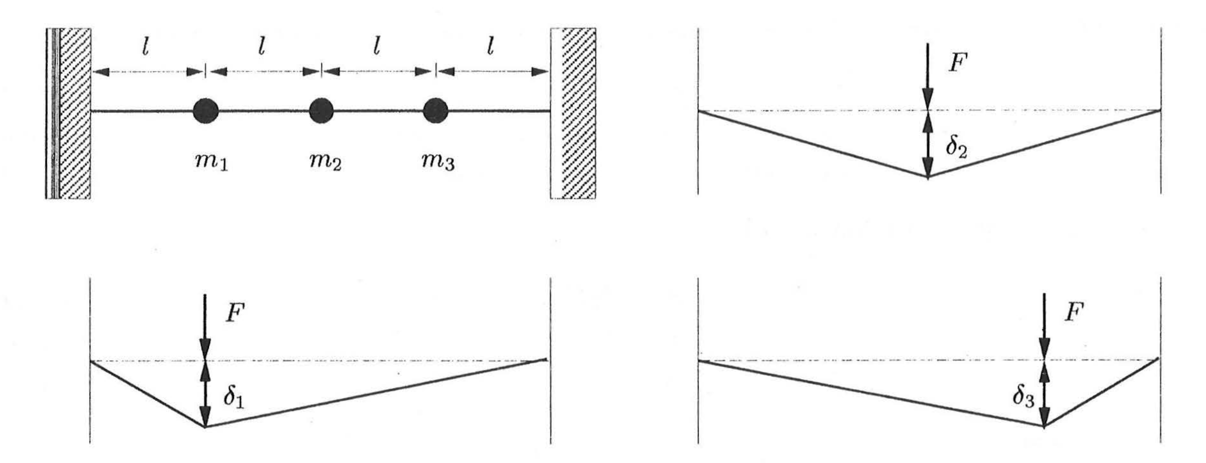


Figura 3–5 Ejemplo de cálculo de los coeficientes de influencia

La fuerza F aplicada sobre la masa m_1 produciría un desplazamiento δ_2 de la masa m_2 y δ_3 de la masa m_3 que se obtienen fácilmente en función del desplazamiento δ_1 al estar en triángulos proporcionales,

$$\delta_2/\delta_1 = 2l/3l \quad \Rightarrow \quad \delta_2 = 2\delta_1/3, \qquad \delta_3/\delta_1 = l/3l \quad \Rightarrow \quad \delta_3 = \delta_1/3$$

por lo que los coeficientes de influencia α_{21} y α_{31} quedarían como

$$\alpha_{21} = \frac{\delta_2}{F} = 2\alpha_{11}/3 = \frac{1}{2}\frac{l}{\mathcal{F}}, \qquad \alpha_{31} = \frac{\delta_3}{F} = \alpha_{11}/3 = \frac{1}{4}\frac{l}{\mathcal{F}}$$

Los demás coeficientes de influencia se obtendrían de forma similar, quedando todos ellos como

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \alpha_{33} = \frac{3}{4}\frac{l}{\mathcal{F}} \\ \alpha_{22} &= \frac{l}{\mathcal{F}} \\ \alpha_{31} &= \alpha_{13} = \frac{1}{4}\frac{l}{\mathcal{F}} \\ \alpha_{21} &= \alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{1}{2}\frac{l}{\mathcal{F}} \end{aligned} \tag{3–21}$$

y las ecuaciones de movimiento se obtendrían sustituyendo estos valores de los coeficientes de influencia en las ecuaciones (3–16). Si agrupamos y denominamos $\xi = \mathcal{F}/ml\omega^2$ las ecuaciones de movimiento quedan

$$\begin{aligned} (3/4 - \xi)A_1 + A_2/2 + A_3/4 &= 0 \\ A_1/2 + (1 - \xi)A_2 + A_3/2 &= 0 \\ A_1/4 + A_2/2 + (3/4 - \xi)A_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3–22}$$

y para que exista solución en ξ el determinante debe ser 0, luego la ecuación de frecuencias queda de la forma

$$\xi^3 - 5\xi^2/2 + 3\xi/2 - 1/4 = 0 \tag{3–23}$$

que tendrá tres soluciones en ξ. Éstas deben ser positivas, ya que un valor negativo o nulo de ξ no puede satisfacer esta ecuación y por tanto las tres frecuencias angulares ω que se derivan de las tres soluciones de ξ deben ser frecuencias reales.

En general, todo sistema oscilante de n grados de libertad sin amortiguamiento tiene n frecuencias propias reales. Más adelante se tratarán las ondas estacionarias en una cuerda vibrante y en otros sistemas similares, sistemas de infinitos grados de libertad que darán lugar a infinitas frecuencias propias.

Referencias

[1] Alonso, M. y E. J. Finn, *Física*. Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1995.

[2] Feynmann, R. P., R. B. Leighton y M. Sands, *Mecánica, radiación y calor*, vol. 1 de *Física*. Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1987.

[3] Den Hartog, J. P., *Mechanical vibrations*. Dover, N. York, 1985.

[4] Landau, L., A. Ajiezer y E. Lifshitz, *Curso de Física general: mecánica y Física molecular*. Ed. Mir, Moscú, 1979.

[5] Tipler, P. A., *Física*, vol. 1. Reverté, Barcelona, 1992.

[6] Yavorski, B. M. y A. A. Detlaf, *Manual de Física*. Ed. Mir, Moscú, 1977.

[7] Abramowitz, M. y I. A. Stegun (editores), *Handbook of mathematical functions*. Dover, Nueva York, 1972.

[8] Spiegel, M. R., *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*. McGraw-Hill, México, 1970.

[9] Strelkóv, S., *Mecánica*. Ed. Mir, Moscú, 1978.

Indice alfabético

CUADERNO

244.01

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN

http://www.aq.upm.es/of/jherrera

info@mairea-libros.com

ISBN 978-84-9728-252-9

